DEVOIR SURVEILLÉ N3

EXERCICE 1 (9 *points*)

1. *Calculer les intégrales suivantes :* $I = \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx$ *et* $J = \int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x} dx$. (2,5 *pts*)

2. *En utilisant une intégration par partie, montrer que :* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x . \ln(1+\cos x)\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$. (2 *pts*)

3. *Calculer la valeur moyenne de la fonction :* $f(x) = \cos 2x$ *sur* $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. (1,5 *pts*)

4. *On considère la fonction* f *définie par :* $f(x) = x \ln x$. *Et* (C_f) *la courbe représentative de la fonction* f *dans un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. (*On prendra* $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1cm$).

   Calculer l'aire en cm^2 *du domaine délimité par* (C_f), *l'axe des abscisses, et les droites d'équations* $x = 1$ *et* $x = e$. (2*pts*)

EXERCICE 2 (11 *points*)

1. *Résoudre dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *l'équation* $(E) : z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$. (2 *pts*)

   Dans le plan complexe (P) *rapporté à un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, *on considère les points* A *et* B *d'affixes respectifs :* $z_A = 2\sqrt{3} - 2i$ *et* $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$.

2. **a)** *Écrire* z_A *et* z_B *sous forme trigonométrique.* (2 *pts*)

   b) *En déduire que :* $OA = OB$ *et* $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. *Puis en déduire la nature du triangle* OAB. (2 *pts*)

3. *Le point* I *est le milieu du segment* $[AB]$ *et soit* C *l'image de* I *par l'homothétie* h *de centre* O *et de rapport* $k = 2$.

   a) *Montrer que l'affixe de* I *est :* $z_I = 2\sqrt{3}$, *puis en déduire que :* $z_C = 4\sqrt{3}$. (2 *pts*)

   b) *Montrer que le quadrilatère* $OACB$ *est un losange.* (2 *pts*)

   c) *Déduire que :* $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}\right) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$. (1 *pt*)

FIN