www.etude-generale.com 2éme BAC PC-SVT
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

DEVOIR SURVEILLÉ

PROBLEME 1 .

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repére orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *(unité 2cm)*

PARTIE 01

1) *Montrer que :* $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$.

2) a) *Calculer :* $\lim_{x \longrightarrow e^+} f(x)$ *et* $\lim_{x \longrightarrow e^-} f(x)$, *puis interpéter géométriquement les deux résultats obtenus.*

b) *Calculer :* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$, *et en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ que l'on déterminera.*

c) *Montrer que :* $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ *et donner une interprétation géométrique à ce résultat.*

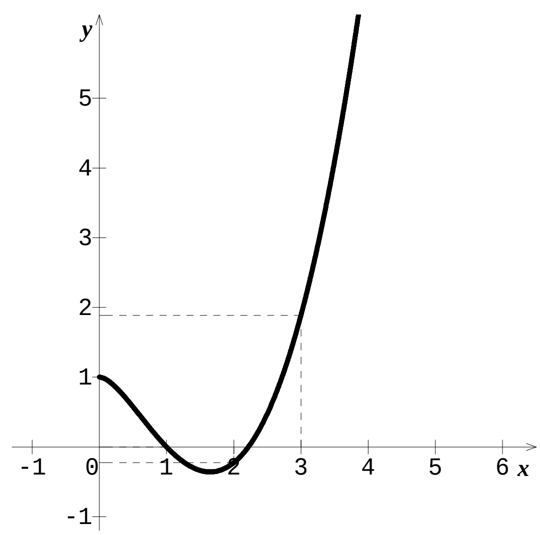
3) a) *Montrer que :* $(\forall x \in D_f)$, $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$

b) *Montrer que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$ et croissante sur chacun des deux intervalles $[1, e[$ et $]e, +\infty[$.*

c) *Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f.*

PARTIE 02 *Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :* $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$

et soit (C_g) la courbe représentative de la fonction g dans un repére orthonormé (voir figure).



1) a) *Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation* (E) *suivante :* $g(x) = 0$, $x \in]0, +\infty[$.

b) *On donne le tableau de valeurs suivant :*

x	*2,1*	*2,2*	*2,3*	*2,4*
$g(x)$	$-0,14$	$-0,02$	*0,12*	*0,28*

Montrer que l'équation (E) *admet une solution* α *telle que :* $2,2 < \alpha < 2,3$

2) a) *Vérifier que :* $(\forall x \in D_f)\,,\; f\,(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1 - \ln x)}$

b) *Montrer que la droite* (Δ) *d'équation* $y = x$ *coupe la courbe* (C_f) *aux deux points d'absisses* 1 *et* α*.*

c) *Déterminer, à partir de* (C_g)*, la signe de la fonction* g *sur l'intervalle* $[1, \alpha]$ *et montrer que :* $f(x) - x \leq 0$ *pour tout* x *de* $[1, \alpha]$.

3) *Tracer, la courbe* (C_f) *et la droite* (Δ) *dans le repére orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

PARTIE 03 *On considère la suite numérique* (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\; u_{n+1} = f\,(u_n) \end{cases}$

1) *Montrer par récurrence que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\, 1 \leq u_n \leq \alpha$*.*

2) *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

3) *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

FIN

Pr : Yahya MATIOUI