www.etude-generale.com **2 BAC PC-SVT**
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

CORRECTION DE LA SÉRIE

PROBLEME 1 .

PARTIE 01 .*On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :* $g(x) = e^{2x} - 2x$

1) *Les fonctions $u : x \longmapsto e^{2x}$ et $v : x \longmapsto -2x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $g = u + v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(e^{2x} - 2x\right)' \\ &= 2e^{2x} - 2 \\ &= 2\left(e^{2x} - 1\right) \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\; g'(x) = 2\left(e^{2x} - 1\right).$

2) *Le signe de $g'(x)$ est celui de $e^{2x} - 1$, et comme $e^{2x} - 1 = e^{2x} - e^0$ et puisque la fonction $t \longmapsto e^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors le signe de $g'(x)$ est celui de $2x$ c'est-à-dire*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

donc la fonction g est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.

2) *Déduisons que :* $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\; g(x) > 0.$

Comme la fonction g est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$, donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$\left(\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^{2x} - 2x = \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^{2x}\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = +\infty \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = +\infty\right)$$

on déduit que la fonction g admet une valeur minimale en point d'abscisse 0 sur $\mathbb{R}$, donc $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\; g(x) \geq g(0)$ et comme $g(0) = 1 > 0$ d'où $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\; g(x) > 0$.

MÉTHODE 02

La fonction g est décroissante sur $]-\infty, 0]$, alors $g(x) \geq g(0)$ et comme $g(0) = 1 > 0$ d'où $g(x) > 0$. De même la fonction g est croissante sur $[0, +\infty[$, alors $g(x) \geq g(0)$ d'où $g(x) > 0$. Donc $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ g(x) > 0$.

PARTIE 02 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2x\right)$*

1) a) *Montrons que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^{2x} - 2x = +\infty \ ,\left(car : \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \ \ et \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} -2x = +\infty \right)$, *donc* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \ln\left(e^{2x} - 2x\right) = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ *d'où* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

b) *Vérifions que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\ \dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 2\right) \times \dfrac{\ln\left(e^{2x} - 2x\right)}{e^{2x} - 2x}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln\left(e^{2x} - 2x\right)}{x} \\
&= \ln\left(e^{2x} - 2x\right) \times \frac{1}{x} \\
&= \frac{\ln\left(e^{2x} - 2x\right)}{e^{2x} - 2x} \times \left(\frac{e^{2x} - 2x}{x}\right) \\
&= \frac{\ln\left(e^{2x} - 2x\right)}{e^{2x} - 2x} \times \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2\right)
\end{aligned}$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\ \dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 2\right) \times \dfrac{\ln\left(e^{2x} - 2x\right)}{e^{2x} - 2x}$.

c) *Montrons que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{\ln\left(e^{2x} - 2x\right)}{e^{2x} - 2x} = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0 \ \left(\begin{array}{c} X = e^{2x} - 2x \\ x \longrightarrow -\infty \implies X \longrightarrow +\infty \end{array} \right)$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} - 2 = -2 \ \left(\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} = 0 \right)$ *par produit on obtient :* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{\ln\left(e^{2x} - 2x\right)}{e^{2x} - 2x} \times \left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 2\right) = 0$ *donc*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

d) *La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$.*

2) a) *Vérifions que :* $(\forall x \in [0, +\infty[)\,,\ 1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} > 0$.

Soit $x \in [0, +\infty[$, on a

$$1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0 \iff \frac{2x}{e^{2x}} < 1 \iff 2x < e^{2x} \iff 0 < e^{2x} - 2x \iff g(x) > 0$$

et comme $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ g(x) > 0$ *donc* $(\forall x \in [0,+\infty[)\,,\ 1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} > 0.$

Vérifions que : $2x + \ln\left(1 - \dfrac{2x}{e^{2x}}\right) = f(x)$

Soit $x \in [0,+\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned} 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) &= 2x + \ln\left(\frac{e^{2x} - 2x}{e^{2x}}\right) \\ &= 2x + \ln\left(e^{2x} - 2x\right) - \ln\left(e^{2x}\right) \\ &= 2x + \ln(e^{2x} - 2x) - 2x \\ &= \ln\left(e^{2x} - 2x\right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in [0,+\infty[)\,,\ \ 2x + \ln\left(1 - \dfrac{2x}{e^{2x}}\right) = f(x)$

b) *Déduisons que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 1 - \dfrac{1}{\dfrac{e^{2x}}{2x}} = 1 \left(car\ :\ \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{e^{2x}}{2x} = +\infty \right)$ *alors*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = \lim_{x \longrightarrow 1} \ln(X) = \ln(1) = 0 \qquad \left(\begin{array}{c} X = 1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} \\ x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow X \longrightarrow 1 \end{array} \right)$$

et comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 2x = +\infty$ *donc par somme on obtient :* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 2x + \ln\left(1 - \dfrac{2x}{e^{2x}}\right) = +\infty$ *d'où*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

c) *Montrons que la droite* (D) *d'équation* $y = 2x$ *est une asymptote oblique*

Montrons que : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0.$

On a :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - 2x \\ = & \lim_{x \longrightarrow +\infty} 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) - 2x \\ = & \lim_{x \longrightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Donc la droite (D) *d'équation* $y = 2x$ *est une asymptote oblique à la courbe* (C) *au voisinage de* $+\infty$.

d) *Montrons que :* $(\forall x \in [0,+\infty[)\,,\ f(x) - 2x \leq 0$

Soit $x \in [0, +\infty[$ *, on a*

$$\begin{aligned} f(x) - 2x &= 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) - 2x \\ &= \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) \end{aligned}$$

comme $-\dfrac{2x}{e^{2x}} \leq 0$, *alors* $1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} \leq 1$, *donc* $\ln\left(1 - \dfrac{2x}{e^{2x}}\right) \leq 0$ $\left(\begin{array}{c}\textit{la fonction } \ln \textit{ est strictement} \\ \textit{croissante sur }]0, +\infty[\end{array}\right)$

Donc

$$(\forall x \in [0, +\infty[) \,, \ f(x) - 2x \leq 0$$

d'où

x	0	$+\infty$
$f(x) - 2x$	0 $\quad -$	

ceci signifie que

♣ *La courbe* (C_f) *est au-dessous de la droite* (D) *sur* $]0, +\infty[$.

♣ $(C_f) \cap (D) = \{A(0,1)\}$.

3) a) *Montrons que :* $(\forall x \in \mathbb{R}) \,, \ f'(x) = \dfrac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$

La fonction $g : x \longmapsto e^{2x} - 2x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et comme* $(\forall x \in \mathbb{R}) \,, \ g(x) > 0$ *donc la fonction* $f : x \longmapsto \ln(e^{2x} - 2x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln'(e^{2x} - 2x) \\ &= \frac{(e^{2x} - 2x)'}{(e^{2x} - 2x)} \\ &= \frac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)} \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R}) \,, \ f'(x) = \dfrac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$.

b) *Étudions le signe de* $f'(x)$ *:*

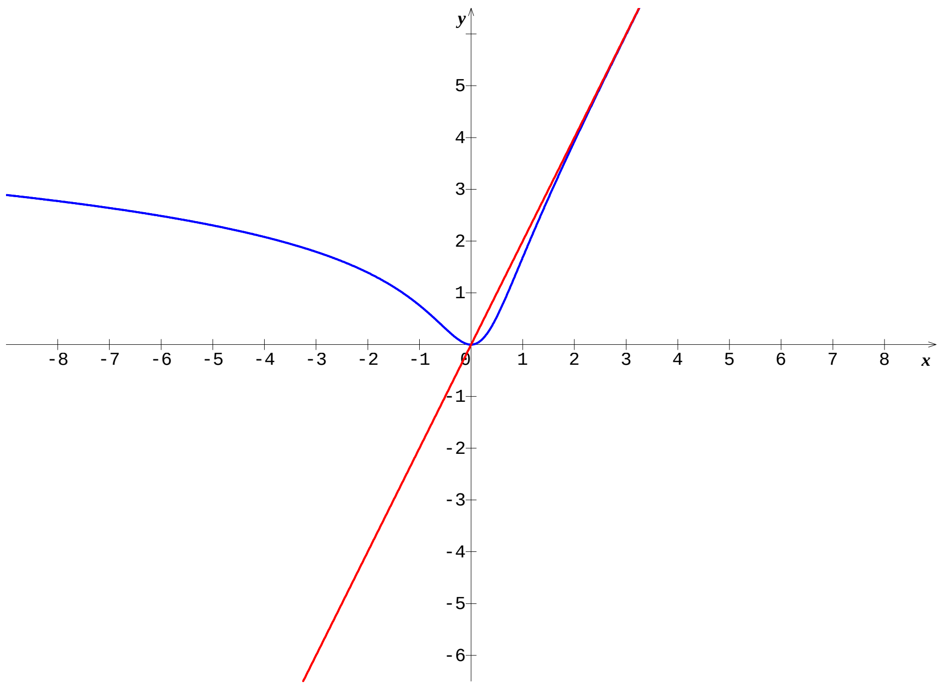
Le signe de $f'(x)$ *est celui de* $e^{2x} - 1$, *(car :* $(\forall x \in \mathbb{R}) \,, \ g(x) > 0$*) et d'après la partie* 01 *on déduit que*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e2x-1$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) *La courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



PROBLEME 2 .

PARTIE 01 *.On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :* $g(x) = e^x - 2x$

1) *Les fonctions $u : x \longmapsto e^x$ et $v : x \longmapsto -2x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $g = u + v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$g'(x) = (e^x - 2x)' = e^x - 2$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R}), \; g'(x) = e^x - 2.$

Déduisons la monotonie de g sur $]-\infty, \ln 2]$ *et* $[\ln(2), +\infty[$:

On a $e^x - 2 = e^x - e^{\ln(2)}$ *et puisque la fonction $t \longmapsto e^t$ est strictement croissante sur*

$\mathbb{R}$ *alors le signe de* $g'(x)$ *est celui de* $x - \ln(2)$ *c'est-à-dire*

x	$-\infty$		$ln(2)$		$+\infty$
$x - ln(2)$		$-$	0	$+$	

donc la fonction g *est croissante sur* $[\ln(2), +\infty[$ *et décroissante sur* $]-\infty, \ln(2)]$.

MÉTHODE 02

On a : $g'(x) = 0 \iff e^x - 2 = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln(2)$ *donc*

$$x \geq \ln 2 \iff e^x \geq 2 \iff e^x - 2 \geq 0 \iff g'(x) \geq 0$$

d'où $(\forall x \in [\ln(2), +\infty[)$, $g'(x) \geq 0$, *par suite* g *est croissante sur* $[\ln(2), +\infty[$.

De même on a : $x \leq \ln(2) \iff g'(x) \leq 0$ *donc* $(\forall x \in]-\infty, \ln(2)])$, $g'(x) \leq 0$, *par suite* g *est décroissante sur* $]-\infty, \ln(2)]$.

2) *Vérifions que :* $g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2)$

On a : $g(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2)$.

Déterminons le signe de $g(\ln 2)$:

On a : $g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2) = 2(\ln e - \ln 2) = 2\ln\left(\frac{e}{2}\right)$, *et comme* $\frac{e}{2} > 1$ *et puisque la fonction* $\ln$ *est strictement croissante donc* $\ln\left(\frac{e}{2}\right) > 0$ *d'où* $g(\ln 2) > 0$.

3) *Déduisons que :* $(\forall x \in \mathbb{R})$, $g(x) > 0$.

On a g *est croissante sur* $[\ln(2), +\infty[$ *et décroissante sur* $]-\infty, \ln(2)]$ *donc*

x	$-\infty$		$ln(2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$2(1-ln(2))$	$\nearrow$	$+\infty$

on déduit que la fonction g *admet une valeur minimale en point d'abscisse* $\ln(2)$ *sur* $\mathbb{R}$, *donc* $(\forall x \in \mathbb{R})$, $g(x) \geq g(\ln(2))$ *et comme* $g(\ln(2)) > 0$ *d'où* $(\forall x \in \mathbb{R})$, $g(x) > 0$.

PARTIE 02 *On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$.

1) a) *Montrons que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \frac{-1}{2}$.

On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x}{e^x-2x} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x}{x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}-2} = 0$

$\left(\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{e^x}{x}-2=+\infty\right)$. *Donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$.

On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{x}{e^x-2x} = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{x}{x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)} = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}-2} = \dfrac{-1}{2}$

$\left(\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{e^x}{x}-2=-2\right)$. *Donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \dfrac{-1}{2}$

b) *Interprétons géométriquement ces réultats.*

Comme $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$ *donc la courbe* (C_f) *admet une asymptote horizontale d'équation* $y=0$ *au voisinage de* $+\infty$. *Et* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \dfrac{-1}{2}$, *donc la courbe* (C_f) *admet une asymptote horizontale d'équation* $y=\dfrac{-1}{2}$ *au voisinage de* $-\infty$.

2) a) *Montrons que :* $(\forall x\in\mathbb{R})$, $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2}$:

La fonction $u : x \longmapsto x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et comme la fonction* $g : x \longmapsto e^x - 2x$ *est dérivable et ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$ $((\forall x\in\mathbb{R}), g(x)>0)$ *donc la fonction* $f=\dfrac{u}{v}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et pour tout* $x\in\mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x}{e^x-2x}\right)' \\
&= \frac{x'(e^x-2x) - x(e^x-2x)'}{(e^x-2x)^2} \\
&= \frac{e^x-2x-x(e^x-2)}{(e^x-2x)^2} \\
&= \frac{e^x-2x-xe^x+2x}{(e^x-2x)^2} \\
&= \frac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2}
\end{aligned}$$

donc $(\forall x\in\mathbb{R})$, $f'(x) = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2}$.

b) *Étudions le signe de* $f'(x)$ *sur* $\mathbb{R}$:

Le signe de $f'(x)$ *est celui de* $(1-x)$ $\left(car \ (\forall x \in \mathbb{R}),\ \dfrac{e^x}{(e^x-2x)^2} > 0 \right)$ *donc*

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Dressons le tableau de variations de f :
On a

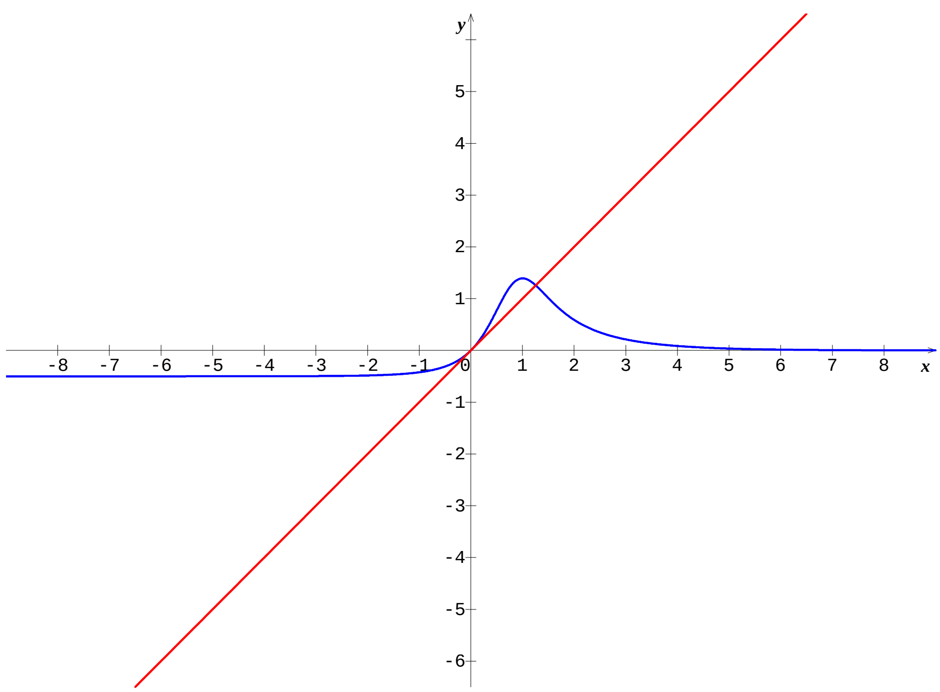
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$\frac{-1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{e-2}$	$\searrow$	0

c) *Une équation de la droite* (T) *tangente à la courbe* (C_f) *au point* O *s'écrit sous la forme*

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

et comme $f'(0) = 1$ *et* $f(0) = 0$ *donc* $(T) : y = x$.

3) *La courbe représentative de la fonction* f *dans le repère orthonormé* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



4) *Montrons que* : $(\forall x \in [0,+\infty[)\,,\quad xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$

La fonction f *admet une valeur maximale en point d'abscisse* 1 *sur* $\mathbb{R}$, *donc* $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f(x) \leq f(1)$ *et comme* $f(1) = \dfrac{1}{e-2}$ *d'où* $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ f(x) \leq \dfrac{1}{e-2}$. *D'où* $(\forall x \in [0,+\infty[)\,,$ $\dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$.

Soit $x \in [0,+\infty[\,,$ *on a* : $xe^{-x} - \dfrac{x}{e^x - 2x} = \dfrac{x - 2x^2 e^{-x} - x}{e^x - 2x} = -\dfrac{2x^2 e^x}{e^x - 2x}$

et comme $-\dfrac{2x^2 e^x}{e^x - 2x} \leq 0$ *donc* $(\forall x \in [0,+\infty[)\,,\ xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x}$. *D'où*

$$(\forall x \in [0,+\infty[)\,,\quad xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.**etude – generale**.**com**