Professeur : Yahya MATIOUI

CORRECTION DEVOIR SURVEILLÉ

PROBLEME 1 *On considère la fonction f définie par :* $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repére orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ *(unité 2cm).*

PARTIE 01

1) *Montrons que :* $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$.

On a

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in\mathbb{R}/\ x>0 \text{ et } 1-\ln x\neq 0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}/\ x>0 \text{ et } \ln x\neq 1\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}/\ x>0 \text{ et } x\neq e\} \\ &=]0,e[\cup]e,+\infty[\end{aligned}$$

donc $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$.

2) a) *Calculons :* $\lim\limits_{x\longrightarrow e^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow e^-} f(x)$:

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow e^+} f(x)$:

On a : $x>e$ *(car* $x\longrightarrow e^+$*) alors* $\ln(x)>1$ *donc* $1-\ln(x)<0$, *ceci signifie que* $\lim\limits_{x\longrightarrow e^+} 1-\ln(x)=0^-$ *d'où*

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow e^+} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow e^+} \frac{1}{x(1-\ln x)} \\ &= \lim_{x\longrightarrow e^+} \frac{1}{x}\times\frac{1}{(1-\ln x)} \end{aligned}$$

et comme : $\lim\limits_{x\longrightarrow e^+}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{e}$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow e^+}\dfrac{1}{(1-\ln(x))}=-\infty$ *par produit on obtient* $\lim\limits_{x\longrightarrow e^+}\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{(1-\ln x)}=-\infty$ *c'est-à-dire*

$$\lim_{x\longrightarrow e^+} f(x)=-\infty$$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow e^-} f(x)$:

On a : $x < e$ *(car* $x \longrightarrow e^-$*) alors* $\ln(x) < 1$ *donc* $1 - \ln(x) > 0$*, ceci signifie que* $\lim\limits_{x \longrightarrow e^-} 1 - \ln(x) = 0^+$ *d'où*

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow e^-} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow e^-} \frac{1}{x(1-\ln x)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow e^-} \frac{1}{x} \times \frac{1}{(1-\ln x)}
\end{aligned}$$

et comme : $\lim\limits_{x \longrightarrow e^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{e}$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow e^-} \frac{1}{(1-\ln(x))} = +\infty$ *par produit on obtient* $\lim\limits_{x \longrightarrow e^+} \frac{1}{x} \times \frac{1}{(1-\ln x)} = +\infty$ *c'est-à-dire*

$$\lim_{x \longrightarrow e^-} f(x) = +\infty$$

♣ *Interprétation géométrique.*
La courbe (C_f) *admet une asymptote verticale d'équation* $x = e$*.*

b) *Calculons* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ *:*

On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{1}{(1-\ln x)}$

et comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{(1-\ln x)} = 0$ $\left(\textit{car } \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty\right)$ *donc par produit on obtient* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{1}{(1-\ln x)} = 0$ *d'où*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Interprétation géométrique.
La courbe (C_f) *admet une asymptote horizontale d'équation* $y = 0$ *au voisinage de* $+\infty$*.*

c) *Montrons que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \frac{1}{(1-\ln x)} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x - x\ln x}$
et comme $x > 0$ $(x \longrightarrow 0^+)$ *alors* $x\ln(x) < 0$ *donc* $x - x\ln(x) > 0$ *d'où :* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x - x\ln(x) = 0^+$ *c'est-à-dire* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x - x\ln x} = +\infty$ *donc*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Interprétation géométrique.
La courbe (C_f) *admet une asymptote verticale d'équation* $x = 0$*.*

3) a) *Montrons que :* $(\forall x \in D_f)\,,\quad f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2(1-\ln x)^2}$.

La fonction f est dérivable sur D_f, et pour tout $x \in D_f$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{x\,(1-\ln x)}\right)' \\
&= \frac{-\left(x\,(1-\ln x)\right)'}{x\,(1-\ln x)^2} \\
&= -\frac{(1-\ln x)-1}{x^2(1-\ln x)^2} \\
&= \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}
\end{aligned}$$

donc $(\forall x \in D_f)\,,\quad f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2\,(1-\ln x)^2}.$

b) *Le signe de $f'(x)$ sur D_f est le même que celui de $\ln(x)$* $\big($*car* $(\forall x \in D_f)\,,\ x^2\,(1-\ln x)^2 > 0\big)$.
On a

x	0		1		e	$+\infty$
$ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$		

donc la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur chacun des deux intervalles $[1,e[$ et $]e,+\infty[$.

c) *Dressons le T.V de la fonction f :*

On a

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

PARTIE 02 *Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :* $g(x) = 1 - x^2\,(1-\ln x)\,.$

1) a) *Graphiquement la courbe (C_g) coupe l'axe des abscisses en deux points différents. Donc l'équation (E) : $g(x) = 0$ admet deux solutions distinctes dans l'intervalle* $]0,+\infty[$.

b) *Montrons que l'équation (E) admet une solution α telle que :* $2,2 < \alpha < 2,3$

♣ *Les fonctions $u : x \longmapsto 1$, $v : x \longmapsto -x$ et $w : x \longmapsto 1-\ln(x)$ sont continues sur $]0,+\infty[$ donc la fonction $g = u + v \times w$ est continue sur $]0,+\infty[$, en particulier elle est continue sur $[2,2;2,3]$.*

♣ *On a $g(2,2) = -0,02$ et $g(2,3) = 0,12$ donc $g(2,2) \times g(2,3) < 0$.*

d'où d'après le T.V.I l'équation (E) admet une solution α telle que : $2,2 < \alpha < 2,3$.

2) a) *Vérifions que :* $(\forall x \in D_f)\,,\ f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$.

Soit $x \in D_f$, *on a*

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{1}{x(1-\ln x)} - x \\ &= \frac{1 - x^2 + x^2 \ln x}{x(1-\ln x)} \\ &= \frac{1 - x^2(1-\ln x)}{x(1-\ln x)} \\ &= \frac{g(x)}{x(1-\ln x)} \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in D_f)\,,\ f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$.

b) *Montrer que la courbe* (C_f) *coupe la droite* $(\Delta) : y = x$ *en deux points*

Soit $x \in D_f$, *on a*

$$f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff \frac{g(x)}{x(1-\ln x)} = 0 \iff g(x) = 0$$

puisque l'équation $(E) : g(x) = 0$ *admet deux solutions* 1 *et* α, *donc la courbe* (C_f) *coupe la droite* $(\Delta) : y = x$ *en deux points d'abscisses* 1 *et* α.

c) *Graphiquement la fonction* g *est négative sur* $[1,\alpha]$, *c'est-à-dire :* $(\forall x \in [1,\alpha])\,,$ $g(x) \leq 0$.

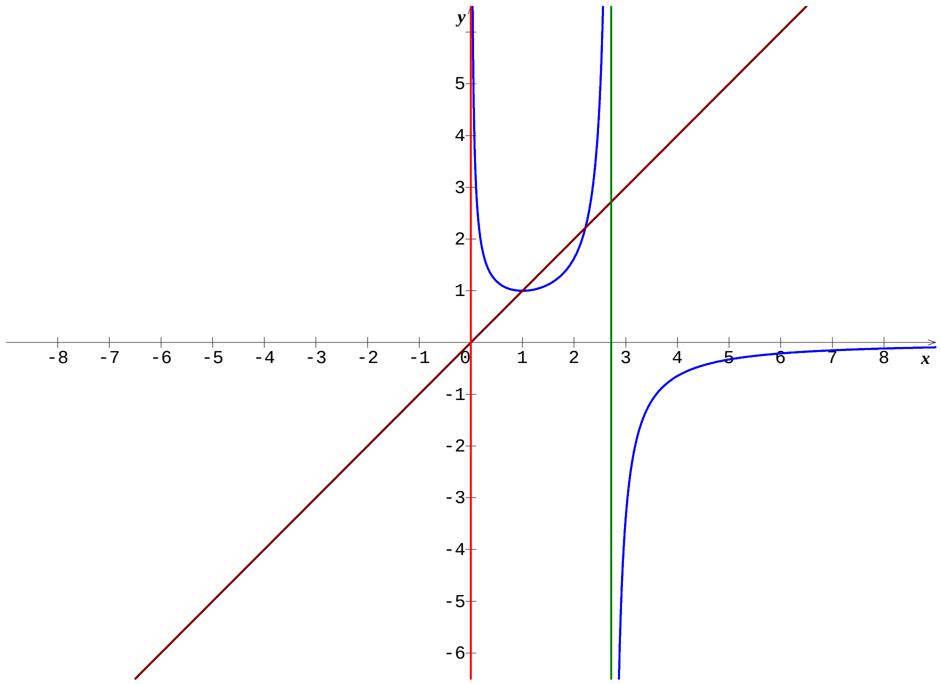
Montrons que : $(\forall x \in [1,\alpha])\,,\ f(x) - x \leq 0$.

Soit $x \in [1,\alpha]\,,$ *on a :* $f(x) - x = \dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$.

On a : $1 \leq x \leq \alpha$ *alors* $1 - \ln\alpha \leq 1 - \ln x \leq 1$ *et comme* $1 - \ln\alpha > 0$ *donc* $(\forall x \in [1,\alpha])\,,\ x(1-\ln x) > 0$. *Or* $(\forall x \in [1,\alpha])\,,\ g(x) \leq 0$, *d'où*

$$(\forall x \in [1,\alpha])\,,\ f(x) - x \leq 0.$$

3) *La courbe représentative de la fonction f dans un repére orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



PARTIE 03 *On considère la suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 1 \leq u_n \leq \alpha$

Pour $n = 0$, *on a* $u_0 = 2$ *et comme* $1 \leq u_0 \leq \alpha$. *Alors l'encadrement est vari pour* $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on suppose que* $1 \leq u_n \leq \alpha$, *et montrons que* $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

On a : $1 \leq u_n \leq \alpha$ *et comme la fonction* f *est croissante sur* $[1,\alpha]$ *alors* $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$ *et comme* $(\forall x \in [1,\alpha]),\ f(x) \leq x$ *alors* $f(\alpha) \leq \alpha$ *et* $f(1) = 1$ *donc* $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

D'après le principe de récurrence on déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 1 \leq u_n \leq \alpha$.

2) *Montrons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

On a $(\forall x \in [1,\alpha]),\ f(x) \leq x$ *et comme* $u_n \in [1,\alpha]$ *donc* $f(u_n) \leq u_n$ *c'est-à-dire* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} \leq u_n$. *D'où la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et puisqu'elle est minorée par* 1, *alors elle est convergente.*

3) *Détermions la limite.*

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = f(u_n)$ *et* $u_0 \in [1,\alpha]$. *On a* f *est continue sur* $[1,\alpha]$ *et* $f([1,\alpha]) \subset [1,\alpha]$ *et comme la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et sa limite* ℓ $\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell\right)$ *est une solution de l'équation* $f(x) = x$ *dans* $[1,\alpha]$.

On a $(\forall x \in [1,\alpha]),\ f(x) = x \iff x = 1 \quad ou \quad x = \alpha$.

Donc $\ell = 1$ *ou* $\ell = \alpha$ *et comme la suite est décroissante alors* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n \leq u_0$ *donc* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n \leq 2$ *par suite* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n \leq 2$ *c'est-à-dire* $\ell \leq 2$ *d'où*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 1.$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com