CORRECTION DEVOIR SURVEILLÉ

PROBLEME 1 .

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2\ln|x-1| + \ln(2x+1)$

1. *Déterminons* D_f :

   On a

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x-1| > 0 \quad et \quad 2x+1 > 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x-1 \neq 0 \quad et \quad x > \frac{-1}{2}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 1 \quad et \quad x > \frac{-1}{2}\right\} \\ &= \left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[\setminus \{1\} \\ &= \left]\frac{-1}{2}, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\end{aligned}$$

2. *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $f(x) = 0$.

   Soit $x \in D_f$, *on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ &\iff 2\ln|x-1| + \ln(2x+1) = 0 \\ &\iff \ln|x-1|^2 + \ln(2x+1) = 0 \\ &\iff \ln(x-1)^2 + \ln(2x+1) = 0 \\ &\iff \ln\left((x-1)^2(2x+1)\right) = 0 \\ &\iff (x-1)^2(2x+1) = 1 \\ &\iff \left(x^2-2x+1\right)(2x+1) = 1 \\ &\iff 2x^3 + x^2 - 4x^2 - 2x + 2x + 1 = 1 \\ &\iff 2x^3 - 3x^2 = 0 \\ &\iff x^2(2x-3) = 0 \\ &\iff x^2 = 0 \quad ou \quad 2x-3 = 0 \\ &\iff x = 0 \ ou \ x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

   et comme $0 \in D_f$ *et* $\frac{3}{2} \in D_f$, *donc l'ensemble des solutions de l'équation* $f(x) = 0$ *est* : $S = \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$.

3. *Dressons le T.V de la fonction f :*

   La fonction f est dérivable sur D_f, et on a pour tout $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times \frac{(x-1)'}{(x-1)} + \frac{(2x+1)'}{(2x+1)} \\ &= \frac{2}{x-1} + \frac{2}{2x+1} \\ &= \frac{6x}{(x-1)(2x+1)} \\ &= \frac{x}{x-1} \times \frac{6}{2x+1} \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in D_f)\,,\quad f'(x) = \dfrac{x}{x-1} \times \dfrac{6}{2x+1}.$

Le signe de $f'(x)$ sur D_f est le même que celui de $\dfrac{x}{x-1}$ $\left(\textit{car } : (\forall x \in D_f)\,, \dfrac{6}{2x+1} > 0\right).$

On a

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{x}{x-1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

donc

x	$\frac{-1}{2}$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||	$+$			
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\left(\begin{array}{c}\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\ln|x-1| = \lim\limits_{X\longrightarrow 0^+}\ln X = -\infty \;\; et \; \lim\limits_{x\longrightarrow 1}\ln(2x+1) = \ln 3 \;\; donc \; \lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^+}\ln|x-1| = \ln\dfrac{3}{2} \;\; et \; \lim\limits_{x\longrightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^+}\ln(2x+1) = \lim\limits_{X\longrightarrow 0^+}\ln X = -\infty \\ donc \; \lim\limits_{x\longrightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^+} f(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\ln|x-1| = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\ln(x-1) = +\infty \;\; et \; \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\ln(2x+1) = +\infty \\ donc \; \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right)$$

4. *Étudions les branches infinies de la courbe* (C_f) :

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x) = -\infty$, *donc* (C_f) *admet une asymptote verticale d'équation* $x = 1$.

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^+} f(x) = -\infty$, *donc* (C_f) *admet une asymptote verticale d'équation* $x = \dfrac{1}{2}$.

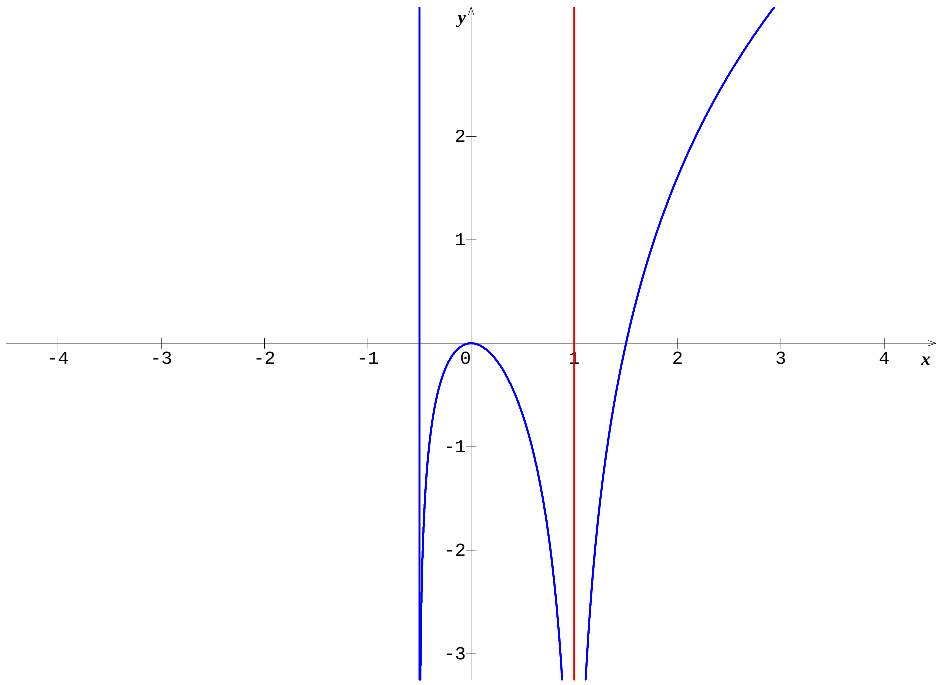
Au voisinage de $+\infty$: *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, *calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2\ln|x-1| + \ln(2x+1)}{x} \\ &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2\ln(x-1) + \ln(2x+1)}{x} \\ &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2\ln\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right) + \ln\left(x\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)}{x} \\ &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2\ln x + 2\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \ln(x) + \ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x\longrightarrow +\infty} 2\frac{\ln x}{x} + 2\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x} + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x}\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x} = 0$ *donc par somme* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$. *Par suite* (C_f) *admet une branche parabolique de direction l'axe des des abscisses au voisinage de* $+\infty$.

La courbe représentative de la fonction f :



PROBLEME 2 .

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=x\ln(1+x)+1-x$

1. *Calculons $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow-1^+}f(x)$:*

   On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x\ln(1+x)+1-x=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x\left(\ln(1+x)+\dfrac{1}{x}-1\right)$

   comme : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\ln(1+x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{x}-1=-1$

   donc par somme $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\ln(1+x)+\dfrac{1}{x}-1=+\infty$ *, d'où* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x\left(\ln(1+x)+\dfrac{1}{x}-1\right)=+\infty$ *c'est-à-dire*

   $$\lim_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=+\infty.$$

   On a $\lim\limits_{x\longrightarrow-1^+}\ln(1+x)=\lim\limits_{X\longrightarrow0^+}\ln(X)=-\infty$ $\left(\begin{array}{c}X=1+x\\ x\longrightarrow-1^+\implies X\longrightarrow0^+\end{array}\right)$ *donc par produit on a* $\lim\limits_{x\longrightarrow-1^+}x\ln(1+x)=+\infty$ *et comme* $\lim\limits_{x\longrightarrow-1^+}\dfrac{1}{x}-1=-2$ *d'où par somme* $\lim\limits_{x\longrightarrow-1^+}x\ln(1+x)+1-x=+\infty$ *c'est-à-dire*

   $$\lim_{x\longrightarrow-1^+}f(x)=+\infty$$

2. *Étudions les branches infinies de la courbe (C_f) :*

   On a $\lim\limits_{x\longrightarrow-1^+}f(x)=+\infty$*, donc (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.*

Au voisinage de $+\infty$: $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$, *calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x\ln(1+x)+1-x}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \ln(1+x)+\dfrac{1}{x}-1 = +\infty$. *Par suite* (C_f) *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de* $+\infty$.

3. **a)** *Calculons* $f''(x)$ *pour tout* $x \in]-1,+\infty[$:

La fonction f *est 2 fois dérivables, on a pour tout* $x \in]-1,+\infty[$:

$$f'(x) = (x\ln(1+x)+1-x)' = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} - 1$$

et donc pour tout $x \in]-1,+\infty[$: $f''(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{2+x}{(1+x)^2}$.

b) *On a* $(\forall x \in]-1,+\infty[)$, $\dfrac{2+x}{(1+x)^2} > 0$ *donc* $(\forall x \in]-1,+\infty[)$, $f''(x) > 0$, *d'où la fonction* f' *est strictement croissante sur* $]-1,+\infty[$.

x	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	
f'	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

$$\left(\begin{array}{c} \lim\limits_{x\longrightarrow-1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow-1^+} \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x} - 1 = \lim\limits_{x\longrightarrow-1^+} \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x} - 1 = -\infty \\ \text{car : } \lim\limits_{x\longrightarrow-1^+} \dfrac{x}{1+x} = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\longrightarrow-1^+} \ln(1+x) = -\infty \end{array}\right)$$

c) *Déduisons qu'il existe un unique réel* $\alpha \in]-1,+\infty[$ *tel que :* $f'(\alpha) = 0$.

La fonction f' *est continue et strictement croissante sur* $]-1,+\infty[$. *De plus* $f'(]-1,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\longrightarrow-1^+} f(x), \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$, *et comme* $0 \in \mathbb{R}$, *alors il existe un unique réel* $\alpha \in]-1,+\infty[$ *tel que :* $f'(\alpha) = 0$.

d) *Vérifions que* : $0 < \alpha < 1$.

La fonction f' *est continue sur* $]-1,+\infty[$, *alors elle est continue sur* $[0,1]$, *et on a* $f'(0) = -1$ *et* $f'(1) = \ln(2) - \dfrac{1}{2}$ *d'où* $f'(0) \times f'(1) < 0$. *Donc d'après le T.V.I on a* : $0 < \alpha < 1$.

Déduisons le signe de $f'(x)$ *sur* $]-1,+\infty[$.

La fonction f *est strictement croissante sur* $]-1,+\infty[$, *donc :*

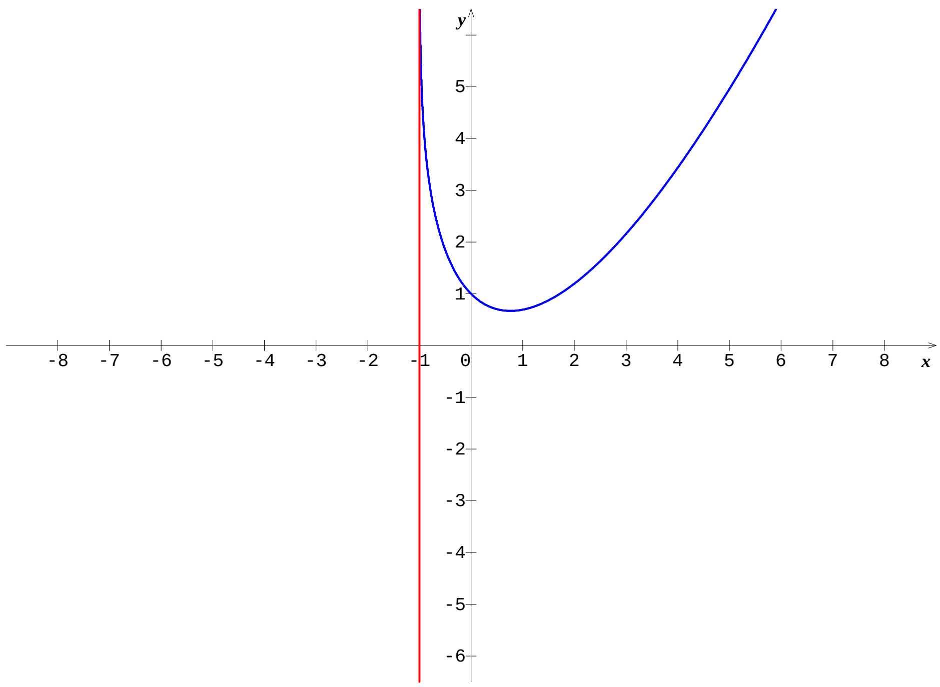
♣ $(\forall x \in]-1, \alpha])\,, \quad f'(x) \leq 0.$

♣ $(\forall x \in [\alpha, +\infty[)\,, \quad f'(x) \geq 0.$

e) *Dressons le T.V de f :*

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. La courbe représentative de la fonction f :



FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com