CORRECTION DEVOIR

EXERCICE 1 .

On résout dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ *l'inéquation :* $\cos x - \sqrt{3}\sin x < 1$.
Transformons l'expression : $\cos x - \sqrt{3}\sin x$
On a

$$\begin{aligned}\cos x - \sqrt{3}\sin x &= 2\left(\frac{1}{2}.\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}.\sin x\right)\\ &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}.\cos x - \sin\frac{\pi}{3}.\sin x\right)\\ &= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

Soit $x \in [0, 2\pi]$, *on pose* $X = x + \frac{\pi}{3}$, *donc*

$$0 \leq x \leq 2\pi \iff \frac{\pi}{3} \leq x+\frac{\pi}{3} \leq 2\pi+\frac{\pi}{3} \iff \frac{\pi}{3} \leq x+\frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{3} \iff \frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{7\pi}{3} \iff X \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$$

Résolvons dans $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$ *l'inéquation* (I) : $2\cos X < 1$. *On commence par résoudre l'équation* (E) : $2\cos X = 1$ *dans* $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$.

$$\begin{aligned}(E) &\iff \cos X = \frac{1}{2}\\ &\iff \cos X = \cos\frac{\pi}{3}\\ &\iff \left\{\begin{array}{c} X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ X = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \quad / \ k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

comme $X \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$ *alors*

♣

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{7\pi}{3} \iff \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} + 2k \leq \frac{7}{3} \iff 0 \leq 2k \leq 2 \iff 0 \leq k \leq 1$$

comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $k \in \{0, 1\}$, *donc* $X = \frac{\pi}{3}$ *ou* $X = \frac{7\pi}{3}$.

♣

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{7\pi}{3} \iff \frac{1}{3} \leq \frac{-1}{3} + 2k \leq \frac{7}{3} \iff \frac{2}{3} \leq 2k \leq \frac{8}{3} \iff \frac{1}{3} \leq k \leq \frac{8}{6}$$

comme $k \in \mathbb{Z}$*, alors* $k = 1$*,donc* $X = \dfrac{5\pi}{3}$.

1. *donc*

$$\begin{cases} \cos X = \dfrac{1}{2} \\ X \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{3}\right] \end{cases} \iff X = \frac{\pi}{3} \ \text{ou} \ \ X = \frac{5\pi}{3} \ \ \text{ou} \ \ \ X = \frac{7\pi}{3}$$

On construit le cercle trigonométrique et la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$*, donc*

$$\begin{cases} \cos X < \dfrac{1}{2} \\ X \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{3}\right] \end{cases} \iff X \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[$$

puisque $X \in \left]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right[$*, d'où*

$$\begin{aligned} X \ \varepsilon \ \left]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[&\iff \frac{\pi}{3} < X < \frac{5\pi}{3} \\ &\iff \frac{\pi}{3} < x + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3} \\ &\iff 0 < x < \frac{4\pi}{3} \\ &\iff x \in \left]0, \frac{4\pi}{3}\right[\end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) *dans* $[0, 2\pi]$ *est :*

$$S = \left]0, \frac{4\pi}{3}\right[$$

EXERCICE 2 .

Soit $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *tels que :* $\tan\theta = 2 - \sqrt{3}$.

1. *Montrons que :* $\sin(2\theta) = \dfrac{1}{2}$

   Soit $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$*, on a :* $\sin(2\theta) = 2\sin\theta.\cos\theta$.

Calculons : $\cos\theta$

On a

$$\begin{aligned}1+\tan^2\theta &= \frac{1}{\cos^2\theta}\\ &\iff \cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta}\\ &\iff \cos^2\theta = \frac{1}{1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\\ &\iff \cos^2\theta = \frac{1}{1+4-4\sqrt{3}+3}\\ &\iff \cos^2\theta = \frac{1}{4\left(2-\sqrt{3}\right)}\end{aligned}$$

comme $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *alors* $\cos\theta > 0,$ *donc* $\cos\theta = \dfrac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$ (1)

On a $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, *donc* : $\sin\theta = \tan\theta.\cos\theta$ *d'où*

$$\sin\theta = \left(2-\sqrt{3}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \qquad (2)$$

on en déduit que :

$$\sin 2\theta = 2.\sin\theta.\cos\theta = 2\times\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{2}$$

Déduisons la valeur de θ :

On a

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= \frac{1}{2}\\ &\iff \sin(2\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ &\iff \left\{\begin{array}{c} 2\theta = \frac{\pi}{6}+2k\pi \\ ou \\ 2\theta = \pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \quad / \ k\in\mathbb{Z}\\ &\iff \left\{\begin{array}{c} \theta = \frac{\pi}{12}+k\pi \\ ou \\ \theta = \frac{5\pi}{12}+k\pi \end{array}\right. \quad / \ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

et comme $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *donc* : $\theta = \dfrac{\pi}{12}$ *ou* $\theta = \dfrac{5\pi}{12}$. *Or* $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$ *et puisque* $\tan\theta = 2-\sqrt{3}$ *d'où*

$$\theta = \frac{\pi}{12}$$

2. On considère dans $\mathbb{R}$ *l'équation :* $(E) : \cos(2x) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

a) *Montrons que :* $(E) \iff \sin(2x+\theta) = \sin\theta$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$
\begin{aligned}
(E) &\iff \cos(2x) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\
&\iff -2\sin\left(\frac{2x + 2x + \frac{\pi}{6}}{2}\right).\sin\left(\frac{2x - 2x - \frac{\pi}{6}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\
&\iff -2\sin\left(\frac{2\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)}{2}\right).\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\
&\iff 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right).\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\
&\iff 2\sin(2x+\theta).\sin(\theta) = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\
&\iff \sin(2x+\theta).\sin(\theta) = \frac{\tan\theta}{4} \\
&\iff \sin(2x+\theta).\sin\theta = \frac{\sin\theta}{4\cos\theta} \\
&\iff \sin\theta\left(\sin(2x+\theta) - \frac{1}{4\cos\theta}\right) = 0 \\
&\iff \sin(2x+\theta) = \frac{1}{4\cos\theta} \\
&\iff \sin(2x+\theta) = \sin\theta. \quad / \frac{1}{4\cos\theta} = \sin\theta
\end{aligned}
$$

donc $(E) \iff \sin(2x+\theta) = \sin\theta$.

b) *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* (E).

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$(E) \iff \sin(2x+\theta) = \sin\theta$$

$$\iff \begin{cases} 2x+\theta = \theta + 2k\pi \\ \quad ou \\ 2x+\theta = \pi - \theta + 2k\pi \end{cases} \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} x = k\pi \\ \quad ou \\ x = \dfrac{\pi}{2} - \theta + k\pi \end{cases} \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} x = k\pi \\ \quad ou \\ x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} x = k\pi \\ \quad ou \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *est :*

$$S = \{k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \ \} \cup \left\{ \frac{5\pi}{12} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \ \right\}$$

3. *Résolvons dans* $[0, \pi]$ *l'inéquation :* $(I) : \cos(2x) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

   Soit $x \in [0, \pi]$, *on a*

$$\cos(2x) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff 2\sin(2x+\theta) \,.\, \sin(\theta) \leq \frac{2-\sqrt{3}}{2} \iff \sin(2x+\theta) \,.\, \sin(\theta) \leq \frac{\tan\theta}{4}$$

$$\iff \sin(2x+\theta) \,.\, \sin\theta - \frac{\sin\theta}{4\cos\theta} \leq 0$$

$$\iff \sin\theta \left(\sin(2x+\theta) - \frac{1}{4\cos\theta} \right) \leq 0$$

$$\iff \sin(2x+\theta) - \sin\theta \leq 0$$

On pose $X = 2x + \theta$, *on a*

$$0 \leq x \leq \pi \iff \theta \leq 2x+\theta \leq 2\pi + \theta \iff \frac{\pi}{12} \leq 2x + \theta \leq \frac{25\pi}{12} \iff X \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{25\pi}{12}\right]$$

Résolvons dans $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{25\pi}{12}\right]$ *l'inéquation* $(I) : \sin(X) \leq \sin\theta$. *On commence par résoudre l'équation* $(E) : \sin X = \sin\theta$ *dans* $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{25\pi}{12}\right]$.

On a

$$
\begin{aligned}
(E) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sin(X) = \sin\theta \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} X = \theta + 2k\pi \\ ou \\ X = \pi - \theta + 2k\pi \end{array} \right. \quad / \; k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} X = \dfrac{\pi}{12} + 2k\pi \\ ou \\ X = \dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi \end{array} \right. \quad / \; k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

comme $X \in \left[\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{25\pi}{12}\right]$ *alors*

■

$$\frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{12} + 2k\pi \leq \frac{25\pi}{12} \Longleftrightarrow \frac{1}{12} \leq \frac{1}{12} + 2k \leq \frac{25}{12} \Longleftrightarrow 0 \leq 2k \leq 2 \Longleftrightarrow 0 \leq k \leq 1$$

comme $k \in \mathbb{Z}$*, alors* $k \in \{0, 1\}$ *alors* $X = \dfrac{\pi}{12}$ *ou* $X = \dfrac{25\pi}{12}$

■

$$\frac{\pi}{12} \leq \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \leq \frac{25\pi}{12} \Longleftrightarrow \frac{1}{12} \leq \frac{11}{12} + 2k \leq \frac{25}{12} \Longleftrightarrow -\frac{5}{6} \leq 2k \leq \frac{7}{6} \Longleftrightarrow \frac{-5}{12} \leq k \leq \frac{7}{12}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$*, alors* $k = 0$ *alors* $X = \dfrac{11\pi}{12}$.
donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin X = \sin\theta \\ \\ X \in \left[\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{25\pi}{12}\right] \end{array} \right. \Longleftrightarrow X = \frac{\pi}{12} \quad ou \quad X = \frac{11\pi}{12} \quad ou \quad X = \frac{25\pi}{12}$$

On construit le cercle trigonométrique et la droite d'équation $y = \sin\theta$*, donc*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin X \leq \sin\theta \\ \\ X \in \left[\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{25\pi}{12}\right] \end{array} \right. \Longleftrightarrow X \in \left[\frac{11\pi}{12}, \frac{25\pi}{12}\right]$$

d'où

$$
\begin{aligned}
X \ \varepsilon \ \left[\frac{11\pi}{12},\frac{25\pi}{12}\right] \quad & \Longleftrightarrow \quad \frac{11\pi}{12} \leq X \leq \frac{25\pi}{12} \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{11\pi}{12} \leq 2x+\theta \leq \frac{25\pi}{12} \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{11\pi}{12} - \theta \leq 2x \leq \frac{25\pi}{12} - \theta \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{5\pi}{6} \leq 2x \leq 2\pi \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{5\pi}{12} \leq x \leq \pi
\end{aligned}
$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) *dans* $[0,\pi]$ *est* :

$$S = \left[\frac{5\pi}{12},\pi\right]$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com