CORRECTION DEVOIR SURVEILLÉ N3

EXERCICE 1 (8 *points*)

1. *Calculons les intégrales* I *et* J :

$$I = \int_1^2 \frac{x}{x+1}dx = \int_1^2 \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int_1^2 1 - \frac{1}{x+1}dx = [x - \ln(x+1)]_1^2 = 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$J = \int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}dx = \left[\frac{\ln^3(x)}{3}\right]_1^e = \left(\frac{\ln^3 e}{3} - \frac{\ln^3 1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

2. *Montrons que* : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x . \ln(1+\cos x)\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$

On pose

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+\cos x) \\ v'(x) = \cos x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{-\sin x}{1+\cos x} \\ v(x) = \sin x \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x).\ln(1+\cos x)dx &= [\sin x . \ln(1+\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx \qquad / \ \left(\sin^2 x = 1 - \cos^2 x\right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos x dx \\ &= [x - \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

3. *Calculons la valeur moyenne de* f *sur* $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

On a : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

et comme : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)}{2} - \frac{\sin(0)}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

donc $m = \frac{2}{\pi}$.

4. *Calculons l'aire entre* (C_f) *et l'axe des abscisses et les droites d'équations :* $x = 1$ *et* $x = e$.

On a : $A = \left(\int_1^e |f(x)|\, dx\right) \times ua$, *et comme* $f \geq 0$ *sur* $[1, e]$, *et :* $ua = \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1cm^2$, *alors :* $A = \left(\int_1^e f(x)dx\right) \times 1cm^2$

Calculons : $\int_1^e f(x)dx$

On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ \\ v'(x) = x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x dx &= \left[\ln x . \frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{e^2+1}{4} \end{aligned}$$

d'où : $A = \left(\dfrac{e^2+1}{4}\right) cm^2$

EXERCICE 2 (11 *points*)

1. *Résolvons l'équation* $(E) : z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 16 = -16 < 0$, *donc, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :* z_1 *et* z_2.

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4\sqrt{3} + i\sqrt{16}}{2} = \frac{4\sqrt{3} + 4i}{2} = 2\sqrt{3} + 2i$$

et comme : $z_2 = \overline{z_1} = \overline{(2\sqrt{3} + 2i)} = 2\sqrt{3} - 2i$. *d'où*

$$S = \left\{2\sqrt{3} - 2i, 2\sqrt{3} + 2i\right\}$$

2. **a)** *La forme trigonométrique des complexes :* z_A *et* z_B.

On a : $|z_A| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4} = \sqrt{16} = 4,$ *donc*

$$\begin{aligned} z_A &= 2\sqrt{3} - 2i \\ &= 4\left(\frac{2\sqrt{3}}{4} - \frac{2}{4}i\right) \\ &= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= 4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) \end{aligned}$$

On a $|z_B| = 4,$ *donc* $z_B = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$

b) *Déduisons que :* $OA = OB$ *et* $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

On a : $OA = |z_A - z_O| = 4$ *et* $OB = |z_B - z_O| = 4,$ *donc* $OA = OB.$
On a

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) &\equiv \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg(z_B) - \arg(z_A)\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{aligned}$$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi].$

Comme $OA = OB$ *et* $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ *ceci signifie que le triangle* OAB *est équilatèral.*

3. **a)** *Montrons que :* $z_I = 2\sqrt{3},$ *déduisons que :* $z_C = 4\sqrt{3}$

On a : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{\left(2\sqrt{3} - 2i\right) + \left(2\sqrt{3} + 2i\right)}{2} = 2\sqrt{3}.$

Déduisons que : $z_C = 4\sqrt{3}$
On a

$$\begin{aligned} h(I) &= C \\ &\iff \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI} \\ &\iff z_C - z_O = 2\left(z_I - z_O\right) \\ &\iff z_C = 2z_I = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

b) *Montrons que :* $OACB$ *est un losange.*

On a : $\overrightarrow{OA} = z_A - z_O = z_A$ *et* $\overrightarrow{BC} = z_C - z_B = 4\sqrt{3} - \left(2\sqrt{3} + 2i\right) = 2\sqrt{3} - 2i = z_A$. *Donc, on obtient* $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$. *Ceci signifie que* $OACB$ *est un parallélogramme, et comme* $OA = OB$. *(deux côtés consécutifs de même longueur). donc* $OACB$ *est un losange.*

c) *On déduit que :* $\left(\overline{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$

On a $OACB$ *est un losange, donc ses angles consécutifs sont supplémentaires. Donc :*

$$\left(\overline{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \pi\,[2\pi]$$

on sait que $\left(\overline{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$, *alors* $\left(\overline{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}}\right) + \dfrac{\pi}{3} \equiv \pi\,[2\pi]$

donc $\left(\overline{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}}\right) \equiv \pi - \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$ *c'est-à-dire* $\left(\overline{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}}\right) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

FIN

www.etude – generale.com

Pr : Yahya MATIOUI