www.etude-generale.com **2éme BAC PC**
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

CORRECTION DEVOIR SURVEILLÉ N3

EXERCICE 1 (8 *points*)

1. *Calculons les intégrales* : I *et* J.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{x-1}{(x^2-2x+3)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-2}{(x^2-2x+3)^2}dx = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{x^2-2x+3}\right]_0^1 = \frac{-1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) = \frac{-1}{12} \\
J &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}\left|\ln x\right| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{\ln x}{x}dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx \\
&= -\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e \\
&= \frac{\ln^2\left(\dfrac{1}{e}\right)}{2} + \frac{\ln^2(e)}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}
$$

2. *Montrons que* : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\,dx = 6\ln 3 - 2$:
   On pose

$$
\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = 2x+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v(x) = x^2 + x \end{cases}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx &= \left[(x^2+x).\ln(x+1)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2+x}{x+1}dx \\
&= 6\ln 3 - \int_0^2 \frac{x^2+x}{x+1}dx \\
&= 6\ln 3 - \int_0^2 xdx \\
&= 6\ln 3 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 6\ln 3 - 2
\end{aligned}
$$

3. *Calculons la valeur moyenne de f sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   On a : $m = \dfrac{1}{b-a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \dfrac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$

   et comme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[-\dfrac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\dfrac{\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)}{2} + \dfrac{\cos(0)}{2}\right) =$ 1 *donc* $m = \dfrac{2}{\pi}$.

4. *Calculons l'aire entre* (C_f) *et l'axe des abscisses et les droites d'équations :* $x = 0$ *et* $x = 1$.

   On a : $A = \left(\int_0^1 |f(x)|\,dx\right) \times ua$, *et comme* $f \geq 0$ *sur* $[0,1]$, *et :* $ua = \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 4cm^2$, *donc*

$$A = \left(\int_0^1 f(x)dx\right) \times 4cm^2$$

   Calculons : $\int_0^1 f(x)dx$

   On pose : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$ *donc*

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - [e^x]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

   d'où $A = 4cm^2$.

EXERCICE 2 (11 *points*)

1. *Résolvons dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $(E) : z^2 - 2z + 4 = 0$.

   On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$, *donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :* z_1 *et* z_2.

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + i\sqrt{12}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$$

   et comme : $z_2 = \overline{z_1} = \left(\overline{1 + i\sqrt{3}}\right) = 1 - i\sqrt{3}$, *d'où*

$$S = \left\{1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}\right\}$$

2. **a)** *Déterminons une forme trigonométrique des complexes :* b *et* c.

On a : $|b| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$*, donc*

$$\begin{aligned} b &= 2+2i \\ &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

On a $|c| = 2$*, donc :* $c = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

b) *Vérifions que :* $a - d = -\sqrt{3}\,(c-d)$.

On a :

$$\begin{aligned} a - d &= 1 - i\sqrt{3} - \left(-2+2\sqrt{3}\right) \\ &= 1 - i\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3} \\ &= 3 - 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} -\sqrt{3}\,(c-d) &= -\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + i - \left(-2+2\sqrt{3}\right)\right) \\ &= -\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + i + 2 - 2\sqrt{3}\right) \\ &= -\sqrt{3}\left(2 - \sqrt{3} + i\right) \\ &= -2\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3}i \\ &= 3 - 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} \end{aligned}$$

donc : $a - d = -\sqrt{3}(c-d)$.

Déduisons que les points A , C *et* D *sont alignés.*

On a : $a - d = -\sqrt{3}(c-d)$ *alors* $\dfrac{a-d}{c-d} = \sqrt{3}$ *donc :* $\dfrac{a-d}{c-d} \in \mathbb{R}$*. Ceci signifie que les points* A , C *et* D *sont alignés.*

3. *Montrons que :* $z' = \dfrac{1}{2}az$.

On a

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\iff z' - z_O = e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z - z_O\right) \\ &\iff z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z \\ &\iff z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z \\ &\iff z' = \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) z \\ &\iff z' = \frac{1}{2}az \end{aligned}$$

4. **a)** *Vérifions que :* $h = ip$.

On a d'après l'expressions complexe de la rotation R :

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}ab \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)(2+2i) \\ &= (1-i\sqrt{3})(1+i) \\ &= 1 + i - i\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= 1 + \sqrt{3} + i(1-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} ip &= i(a-c) \\ &= i(1 - i\sqrt{3} - (\sqrt{3}+i)) \\ &= i(1 - i\sqrt{3} - \sqrt{3} - i) \\ &= i + \sqrt{3} - i\sqrt{3} + 1 \\ &= 1 + \sqrt{3} + i(1-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Donc $h = ip$.

b) *Montrons que :* $\left(\overline{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

On a

$$\begin{aligned} \left(\overline{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}}\right) &\equiv \arg\left(\frac{h-o}{p-o}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{h}{p}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{ip}{p}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg(i)\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{aligned}$$

Donc $\left(\overline{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

c) *La nature du triangle* OHP.

On a : $\left(\overline{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, *donc le trinagle* OHP *est rectangle en* O.

De plus on a :

$$OH = |h| = |ip| = |i| \times |p| = |p| \quad et \quad OP = |p|$$

Ce qui signifie que : $OH = OP$. *C-à-d le trinagle* OHP *est isocèle en* O. *Par suite* OHP *est rectangle et isocèle en* O.

FIN

www.etude – generale.com

Pr : Yahya MATIOUI