www.etude-generale.com **TCSI**
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

CORRECTION DEVOIR SURVEILLÉ

EXERCICE 1 .

On considère les fonctions f *et* h *définies par :* $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ *et* $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$

1. **a)** *Déterminons* D_h *:*

   On a : $D_h = \{x \in \mathbb{R} / \ x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / \ x \neq 1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

   Dressons le T.V de h *:*

   On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$. *Donc la fonction* h *est strictement décroissante sur chacun des intervalles* $]-\infty, 1[$ *et* $]1, +\infty[$.

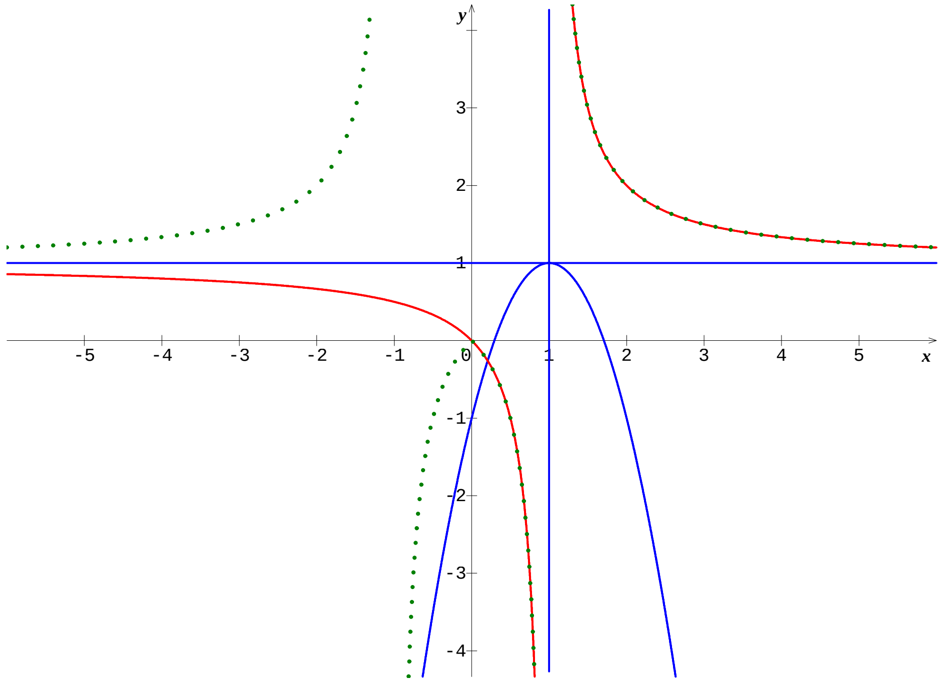
x	$-\infty$		1		$+\infty$
h		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

   b) *La courbe* (C_h) *est l'hyperbole de centre* $S(1,1)$ *et d'asymptotes les droites d'équations respectives* $x = 1$ *et* $y = 1$.

   Calculons $h\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $h(2)$ *et* $h(3)$ *:*

$$h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1} = 3, \qquad h(2) = \frac{2}{2-1} = 2 \quad et \quad h(3) = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$$

c) *Tracer* (C_h) :



2. **a)** *On a :* $a = -2 < 0$ *et* $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{-4} = 1$. *Donc la fonction* f *est strictement croissante sur* $]-\infty, 1]$ *et strictement décroissante sur* $[1, +\infty[$. *D'où*

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	$\nearrow$	1	$\searrow$

(C_f) *c'est une parabole de sommet* $S\,(1, 1)$ *et d'axe de symétrie la droite d'équation* $(D) : x = 1$.

b) *On a* $f\,(0) = -1$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ *et* $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{8}$.

c) *Déterminons graphiquement le nombre des solutions de* $f\,(x) = m$, $(m \in \mathbb{R})$.

- Si $m \in \left]1, +\infty\right[$, *alors l'équation* (E) *n'admet aucune solution.*
- Si $m \in \left]-\infty, 1\right[$, *alors l'équation* (E) *admet deux solutions distinctes.*
- Si $m = 1$, *alors l'équation* (E) *admet une unique solution.*

3. *On considère la fonction numérique* g *définie par :* $g\,(x) = h\,(|x|) = \dfrac{|x|}{|x| - 1}$.

a) *Déterminons* D_g :

On a : $D_g = \{x \in \mathbb{R}/ \quad |x| - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}/ \quad |x| \neq 1\} \{x \in \mathbb{R}/ \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Étudions la parité de g :

Pour tout $x \in D_g, \quad -x \in D_g$.

Soit $x \in D_g$, *on a* $g(-x) = \dfrac{|-x|}{|-x| - 1} = \dfrac{|x|}{|x| - 1} = g(x)$. *Donc la fonction* g *est paire.*

b) *Soit* $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$, *on a* : $g(x) = \dfrac{|x|}{|x| - 1} = \dfrac{x}{x - 1} = h(x)$. $(|x| = x, \quad x \geq 0)$.

Donc la fonction g *est strictement décroissante sur chacun des intervalles* $[0, 1[$ *et* $[1, +\infty[$ *et comme elle est paire donc* g *est strictement croissante sur chacun des intervalles* $]-1, 0]$ *et* $]-\infty, -1]$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

c) *Voir la question 1/c. Pointille en vert*

EXERCICE 2 .

1. *Soit* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs non nuls tels que* : $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{7}\,[2\pi]$.

   Déterminons la mesure principale des angles orientés $\left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}\right)$ *et* $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right)$:

   ♣ *On a* $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}\right)[2\pi]$ *comme* $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{7}\,[2\pi]$ *donc* $\left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{7}\,[2\pi]$.

   D'où la mesure principale des angles orientés $\left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}\right)$ *est* $\dfrac{-\pi}{7}$.

   ♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right) &\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \pi\,[2\pi] \\
&\equiv \frac{\pi}{7} + \pi\,[2\pi] \\
&\equiv \frac{8\pi}{7}\,[2\pi]
\end{aligned}$$

   comme $\dfrac{8\pi}{7} = \dfrac{14\pi - 6\pi}{7} = 2\pi - \dfrac{6\pi}{7}$ *et puisque* $-\dfrac{6\pi}{7} \in \left]-\pi, \pi\right]$ *donc* $-\dfrac{6\pi}{7}$ *est la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right)$.

2. ♣ *On a*

$$\begin{aligned} A &= \cos(x+4\pi)+\cos(5\pi+x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\cos(x-\pi) \\ &= \cos x+\cos(\pi+4\pi+x)-\cos x+\cos x \\ &= \cos x+\cos(\pi+x) \\ &= \cos x-\cos x=0 \end{aligned}$$

♣ *On a* $A=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$

$$Et \left\{ \begin{array}{l} \cos\frac{4\pi}{7}=\cos\left(\frac{7\pi-3\pi}{7}\right)=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)=-\cos\frac{3\pi}{7} \\ \\ \cos\frac{5\pi}{7}=\cos\left(\frac{7\pi-2\pi}{7}\right)=\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)=-\cos\frac{2\pi}{7} \quad donc \\ \\ \cos\frac{6\pi}{7}=\cos\left(\frac{7\pi-\pi}{7}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)=-\cos\frac{\pi}{7} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} A &= \cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{7} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. *Calculons* $A=\cos^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{4\pi}{10}+\cos^2\frac{6\pi}{10}+\cos^2\frac{9\pi}{10}$:

$$On\ a \left\{ \begin{array}{l} \cos^2\frac{6\pi}{10}=\cos^2\left(\frac{5\pi+\pi}{10}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)=\sin^2\frac{\pi}{10} \\ \\ \cos^2\frac{9\pi}{10}=\cos^2\left(\frac{5\pi+4\pi}{10}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{10}\right)=\sin^2\frac{4\pi}{10} \end{array} \right. \quad donc$$

$$\begin{aligned} A &= \cos^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{4\pi}{10}+\sin^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{4\pi}{10} \\ &= \left(\cos^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{\pi}{10}\right)+\left(\cos^2\frac{4\pi}{10}+\sin^2\frac{4\pi}{10}\right) \\ &= 1+1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

EXERCICE 3 .

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=x+\frac{1}{x}$

1. *Étudions la parité de la fonction f :*

   Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $-x\in\mathbb{R}^*$.

   Soit $x\in\mathbb{R}^*$, on a $f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$. *Donc la fonction f est impaire.*

2. *Soit x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$, montrons que :* $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{xy-1}{xy}$.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{x+\frac{1}{x}-\left(y+\frac{1}{y}\right)}{x-y}\\
&= \frac{x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{x-y}\\
&= \frac{x-y+\frac{y-x}{xy}}{x-y}\\
&= \frac{\frac{xy(x-y)+y-x}{xy}}{x-y}\\
&= \frac{xy(x-y)-(x-y)}{xy(x-y)}\\
&= \frac{(x-y)(xy-1)}{xy(x-y)}\\
&= \frac{xy-1}{xy}
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{xy-1}{xy} \quad \text{où } \; x,y\in\mathbb{R}^* \text{ et } x\neq y$$

3. *La monotonie de la fonction f sur $]0,1]$ et $[1,+\infty[$:*

- ♣ *Soit x et y deux éléments de $]0,1]$, tels que $x\neq y$.*
  On a $0<x\leq 1$ et $0<y\leq 1$ alors $0<xy\leq 1$ et comme $x\neq y$ donc $0<xy<1$ d'où $-1<xy-1<0$, et comme $xy>0$. Donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0 \quad \text{où } x,y\in\,]0,1] \text{ et } x\neq y$$

  Ceci signifie que f est strictement décroissante sur $]0,1]$.

- ♣ *Soit x et y deux éléments de $[1,+\infty[$, tels que $x\neq y$.*
  On a $x\geq 1$ et $y\geq 1$ alors $xy\geq 1$ et comme $x\neq y$ donc $xy>1$ d'où $xy-1>0$, et Comme $xy>0$. Donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}>0 \quad \text{où } \; x,y\in[1,+\infty[\; \text{ et } x\neq y$$

  Ceci signifie que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

4. Le tableau de variations de la fonction f

La fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et puisque elle est impaire alors f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$. D'autre part, f est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et puisque elle est impaire alors f est strictement décroissante sur $[-1, 0[$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**