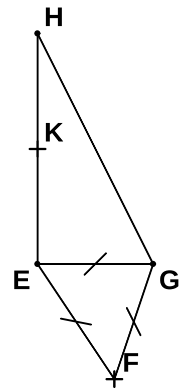
CORRECTION DEVOIR MAISON N4

EXERCICE 1 .

On considère la figure suivante :



1. *Montrons que :* $\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$

   On a d'après la relation de chasles : $\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}\right) \equiv \left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}\right) + \left(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EH}\right)[2\pi]$ *et comme* $\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ *et* $\left(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EH}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ *donc*

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}\right) &\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{5\pi}{6}\,[2\pi]\end{aligned}$$

2. *Montrons que :* $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG} = \frac{a^2}{2}$.

   On a : $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG} = EF.EG.\cos\left(\widehat{FEG}\right)$ *et comme* $EF = EG = a$ *et* $\widehat{FEG} = \frac{\pi}{3}$ *donc*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EG} &= EF.EG.\cos\left(\widehat{FEG}\right) \\ &= a \times a \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= a \times a \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

Déduisons que : $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EH} = -a^2\sqrt{3}$

On a : $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EH} = EF.EH.\cos\left(\widehat{FEH}\right)$ *et comme* $EF = a$*,* $EH = 2a$ *et* $\widehat{FEH} = \dfrac{5\pi}{6}$ *donc*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EH} &= EF.EH.\cos\left(\widehat{FEH}\right) \\
&= a \times 2a \times \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\
&= 2a^2\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= -2a^2\cos\frac{\pi}{6} \\
&= -2a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= -a^2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

3. *Montrons que :* $GH^2 = 5a^2$

   On d'après le théorème de pythagore dans le triangle HEG *:* $GH^2 = EG^2 + EH^2$ *donc*

$$\begin{aligned}
GH^2 &= EG^2 + EH^2 \\
&= a^2 + 4a^2 \\
&= 5a^2
\end{aligned}$$

   Montrons que : $FH^2 = \left(5 + 2\sqrt{3}\right)a^2$

   On applique le théorème d'Al-Kashi dans le triangle FEH*. On a :*

$$\begin{aligned}
FH^2 &= EF^2 + EH^2 - 2EF.EH.\cos\left(\widehat{FEH}\right) \\
&= a^2 + 4a^2 - 2 \times a \times 2a.\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\
&= 5a^2 + 4a^2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&= 5a^2 + 2\sqrt{3}a^2 \\
&= \left(5 + 2\sqrt{3}\right)a^2
\end{aligned}$$

4. *Calculons :* $\overrightarrow{GF}.\overrightarrow{GH}$

   On a : $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH}$ *, donc*

$$\begin{aligned}
FH^2 &= FG^2 + GH^2 + 2\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{GH} \\
\iff & -2\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{GH} = -FH^2 + FG^2 + GH^2 \\
\iff & \overrightarrow{GF}.\overrightarrow{GH} = \frac{-FH^2 + FG^2 + GH^2}{2} \\
\iff & \overrightarrow{GF}.\overrightarrow{GH} = \frac{-\left(5 + 2\sqrt{3}\right)a^2 + a^2 + 5a^2}{2} \\
\iff & \overrightarrow{GF}.\overrightarrow{GH} = \frac{a^2\left(1 - 2\sqrt{3}\right)}{2}
\end{aligned}$$

5. *On pose :* $\left(\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$*, montrons que :* $\cos\theta = \dfrac{\left(1-2\sqrt{3}\right)\sqrt{5}}{10}$

   On applique le théorème d'Al-Kashi dans le triangle FGH*. On a :*

$$\begin{aligned}
FH^2 &= FG^2 + GH^2 - 2FG.GH.\cos\left(\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH}\right)\\
&\Longleftrightarrow \cos\theta = \frac{FG^2 + GH^2 - FH^2}{2FG.GH}\\
&\Longleftrightarrow \cos\theta = \frac{a^2 + 5a^2 - \left(5+2\sqrt{3}\right)a^2}{2a.\sqrt{5}a}\\
&\Longleftrightarrow \cos\theta = \frac{1-2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\\
&\Longleftarrow \cos\theta = \frac{\left(1-2\sqrt{3}\right)\sqrt{5}}{10}
\end{aligned}$$

6. *Calculons* GK *:*

   On applique le théorème de pythagore dans le triangle GEK*, on a :* $GK^2 = GE^2 + EK^2$ *donc*

$$GK^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

EXERCICE 2 .

1. *Résolvons dans* $]0,\pi]$ *l'inéquation* $(I) : 2\cos^2 x - \cos x < 0$.

   Résolvons dans $]0,\pi]$ *l'équation* $(E) : 2\cos^2 x - \cos x = 0$.

   Soit $x \in\,]0,\pi]$*, on a*

$$\begin{aligned}
(E) &\Longleftrightarrow \cos x\,(2\cos x - 1) = 0\\
&\Longleftrightarrow \cos x = 0 \;\; ou \;\; \cos x = \frac{1}{2}\\
&\Longleftrightarrow \cos x = 0 \;\; ou \;\; \cos x = \cos\frac{\pi}{3}\\
&\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; ou \;\; \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \quad /k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

   Comme $x \in\,]0,\pi]$ *c'est-à-dire* $0 < x \leq \pi$ *donc*

   -
$$0 < \frac{\pi}{2} + k\pi \leq \pi \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{2} + k \leq 1 \Longleftrightarrow \frac{-1}{2} < k \leq \frac{1}{2}$$

     comme $k \in \mathbb{Z}$*, alors* $k = 0$*, donc* $x = \dfrac{\pi}{2}$.

- $$0<\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi \iff 0<\frac{1}{3}+2k\leq 1 \iff \frac{-1}{3}<2k\leq 1-\frac{1}{3} \iff \frac{-1}{6}<k\leq\frac{1}{3}$$

  comme $k\in\mathbb{Z}$, *alors :* $k=0$, *donc* $x=\dfrac{\pi}{3}$.

- $$0<\frac{-\pi}{3}+2k\pi\leq\pi \iff 0<\frac{-1}{3}+2k\leq 1 \iff \frac{1}{3}<2k\leq 1+\frac{1}{3} \iff \frac{1}{6}<k\leq\frac{2}{3}$$

  donc $(\forall k\in\mathbb{Z}),\ \left(\dfrac{-\pi}{3}+2k\pi\right)\notin\left]0,\pi\right]$.

Donc les solutions de (E) *dans* $]0,\pi]$ *sont :* $\dfrac{\pi}{3}$ *et* $\dfrac{\pi}{2}$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$cosx$	$+$		$+$	0	$-$	
$2cosx-1$	$+$	0	$-$		$-$	
$cosx(2cosx-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S=\left]\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. *Soit* x *un réel. On pose :* $A(x)=\cos x.\sin x$

a) *Montrons que :* $A\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=A(x)$ *et* $A(\pi+x)=A(x)$.

Soit $x\in\mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x=A(x)\\ A(\pi+x) &= \cos(\pi+x).\sin(\pi+x)=\cos x.\sin x=A(x)\end{aligned}$$

b) *Montrons que :* $A(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$.

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, *on a*

$$\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\cos x.\sin x=A(x)$$

c) *Résolvons dans* $]-\pi, \pi]$ *l'équation :* $A(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

L'équation existe si et seulement si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $x \in]-\pi, \pi] \setminus \left\{\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \iff \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{4} \iff -\sqrt{3}\tan^2 x + 4\tan x - \sqrt{3} = 0$$

On pose $\tan x = X$, *on obtient* $-\sqrt{3}X^2 + 4X - \sqrt{3} = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times \left(-\sqrt{3}\right) \times \left(-\sqrt{3}\right) = 4$$

L'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$\begin{aligned} X &= \frac{-4+\sqrt{4}}{-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ ou \ X = \frac{-4-\sqrt{4}}{2\times(-\sqrt{3})} = \sqrt{3} \\ &\iff \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \ ou \ \tan x = \sqrt{3} \\ &\iff x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ ou \ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad /k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Comme $x \in]-\pi, \pi] \setminus \left\{\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ *c-à-d* $x \in]-\pi, \pi]$ *et* $x \notin \left\{\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ *alors*

♣

$$-\pi < \frac{\pi}{6}+k\pi \leq \pi \iff -1 < \frac{1}{6}+k \leq 1 \iff -1-\frac{1}{6} < k \leq 1-\frac{1}{6} \iff \frac{-7}{6} < k \leq \frac{5}{6}$$

comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors :* $k \in \{-1, 0\}$ *donc* $x = \dfrac{\pi}{6}$ *ou* $x = \dfrac{-5\pi}{6}$.

♣

$$-\pi < \frac{\pi}{3}+k\pi \leq \pi \iff -1 < \frac{1}{3}+k \leq 1 \iff -1-\frac{1}{3} < k \leq 1-\frac{1}{3} \iff \frac{-4}{3} < k \leq \frac{2}{3}$$

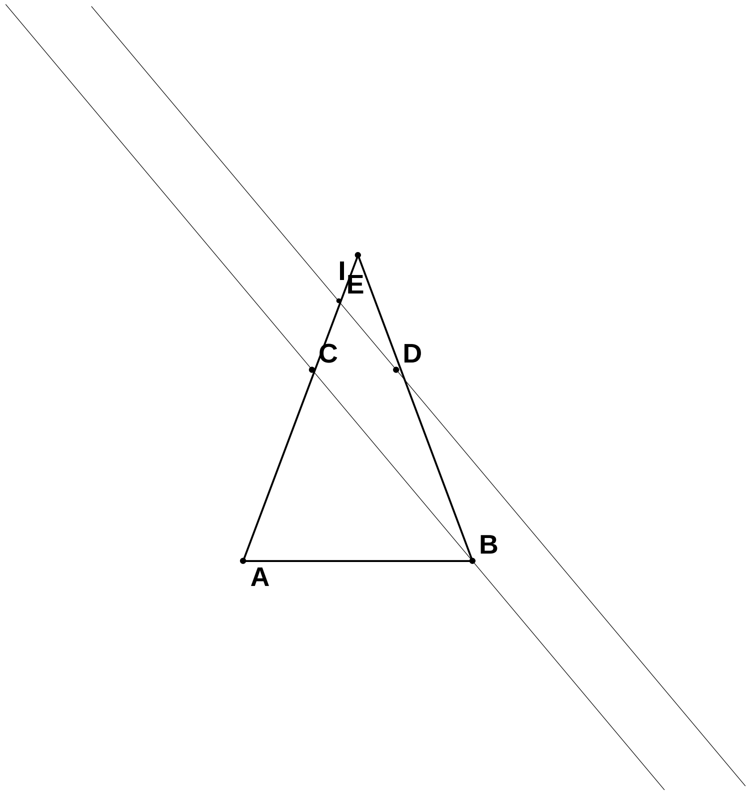
comme $k \in \mathbb{Z}$ *alors :* $k \in \{-1, 0\}$ *donc* $x = \dfrac{-2\pi}{3}$ *ou* $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$S = \left\{\frac{-5\pi}{6}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$$

EXERCICE 3 .

IAB est un triangle et C, D deux points tels que : $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$



1. *On cherche le rapport et le centre de l'homothétie h.*

   On a h est l'homothétie qui transforme A en C et B en D, et comme $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$. Ceci signifie que h est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$.

2. *La droite passant par D et parallèle à (BC) coupe (IA) en E.*

   a) *On cherche $h\left((BC)\right)$:*

   On a : $h(B) = D$, ceci signifie que l'image de la droite (BC) par h est la droite qui passe par D et parallèle à (BC), c'est-à-dire la droite (DE). Donc : $h\left((BC)\right) = (DE)$.

   b) *Montrons que : $h\left(C\right) = E$.*

   On a : $(BC) \cap (IA) = \{C\}$. Donc, il suffit de trouver les images des droites (BC) et (IA) par l'homothétie h.

   On sait que : $I \in (IA)$, donc : $h\left((IA)\right) = (IA)$.

   D'autre part, on a $h\left((BC)\right) = (DE)$. Ceci signifie que l'image du point C par l'homothétie h est l'intersection des droites (IA) et (DE), et comme $(IA) \cap (DE) = \{E\}$. Donc : $h(C) = E$.

EXERCICE 4 .

IAB est un triangle et C, D deux points tels que : $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

On considère l'homothétie h de centre I tel que : $h(C) = A$.

1. *On détermine le rapport de h.*

   On a : $h(C) = A$, *c'est-à-dire :* $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IC}$. (*avec* k *est le rapport de l'homothétie*) .

   D'autre part, on a : $\overrightarrow{IC} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IA}$. *Donc :* $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IC}$, *c'est-à-dire* $k = 3$.

2. *Montrons que :* $h(D) = B$.

   On a : $\overrightarrow{ID} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$. *Donc :* $\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{ID}$, *d'où* $h(D) = B$.

3. *La droite passant par D et parallèle à (BC) coupe (IA) en E.*

   a) *Montrons que :* $h(E) = C$.

   On a : $(DE) \cap (IA) = \{E\}$. *Cherchons* $h((IA))$ *et* $h((DE))$:
   On a $I \in (IA)$, *donc :* $h((IA)) = (IA)$.
   D'autre part, on a : $h(D) = B$, *ceci signifie que l'image de la droite* (DE) *par* h *est la droite qui passe par* B *et parallèle à* (DE) , *c'est-à-dire la droite* (BC) . *Donc :* $h((DE)) = (BC)$. *Ceci signifie que l'image du point* E *par l'homothétie* h *est l'intersection des droites* (IA) *et* (BC) , *et comme* $(IA) \cap (DE) = \{C\}$. *Donc :* $h(E) = C$.

4. *On a :* $h(E) = C$, $h(D) = B$ *et* $h(C) = A$. *Donc l'image du triangle* ECD *par* h *est le triangle* ABC.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com