Professeur : Yahya MATIOUI

CALCULS D'INTÉGRALES

Intégrale d'une fonction continue sur un segment

L'intégrale et les primitives

Définition 1 .

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit a et b deux éléments de I. Le nombre $F(b) - F(a)$, où F est une primitive de f, est appelé l'intégrale de la fonction f de a à b et on le note $\int_a^b f(x)\,dx$. On écrit alors : $\int_a^b f(x)\,dx = [f(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarque 2 .

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,dx$, la lettre x peut être remplacée par une autre lettre. Ainsi, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = ...$$

Exemple 3 .

Calculons les intégrales suivantes : $I = \int_{-1}^{2} (x^2 - 4x + 3)\,dx$, $J = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$, $K = \int_0^{\pi} \sin x dx$ *et* $H = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^t}{e^t + 1} dt$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{2}(x^2 - 4x + 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(\frac{2^3}{3} - 2 \times 2^2 + 3 \times 2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)\right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^2 = \frac{\ln^2 2}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}\ln^2(2) \\ K &= \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2 \\ H &= \int_0^{\ln(2)} \frac{e^t}{e^t + 1} dt = \left[\ln\left(e^t + 1\right)\right]_0^{\ln(2)} = \ln\left(e^{\ln(2)} + 1\right) - \ln\left(e^0 + 1\right) = \ln(3) - \ln(2) \end{aligned}$$

Propriétés

Propriété 4 .

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors on a pour tous a, b et c de I :

♣ $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

♣ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ *(c'est la relation de chasles pour les inégrales)*

Exemple 5 .

Considèrons l'intégarle $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} |x(x+1)|\,dx$. Le tableau de signe de l'expressions $x(x+1)$ sur $[-2, 0]$ est :

x	-2		-1		0
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	

En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-2}^{0} |x(x+1)|\,dx \\
&= \int_{-2}^{-1} |x(x+1)|\,dx + \int_{-1}^{0} |x(x+1)|\,dx \\
&= \int_{-2}^{-1} x^2 + x dx + \int_{-1}^{0} -x^2 - x dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} \\
&= \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) + \left(0 + \frac{1}{6}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

donc $I = 1$.

Propriété 6 .

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.
Pour tout $(a, b) \in I^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \\
\int_a^b \alpha f(x)\,dx &= \alpha \int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

Exemple 7 .

Soit f *une fonction continue sur* $[0,1]$ *définie par :* $f(x)=5x^2-3x$. *Calculons* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$:

On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 \left(5x^2-3x\right)dx\\ &= 5\int_0^1 x^2dx-3\int_0^1 xdx\\ &= 5\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\\ &= 5\left(\frac{1}{3}-0\right)-3\left(\frac{1}{2}-0\right)\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$.

Exemple 8 .

On a :

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx\\ &= \frac{1}{4}\left(\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx-\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx\right)\\ &= \frac{1}{4}\left([\ln|x-2|]_0^1-[\ln|x+2|]_0^1\right)\\ &= -\frac{1}{4}\ln 3.\end{aligned}$$

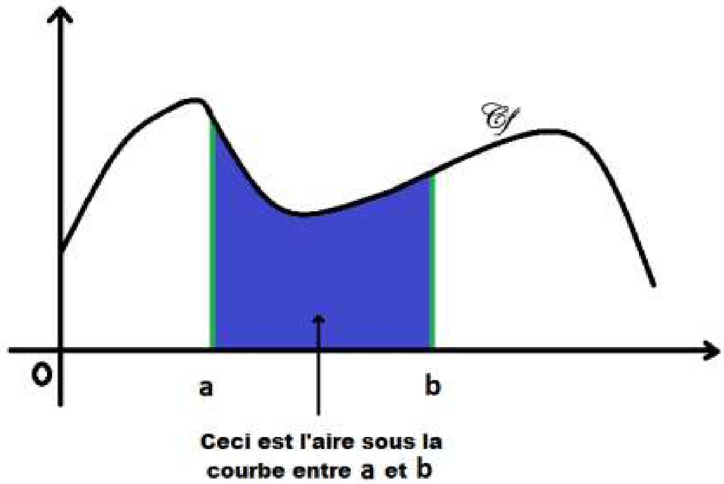
donc $I=-\dfrac{1}{4}\ln 3$.

Interprétation géométrique d'une intégrale

Propriété 9 .

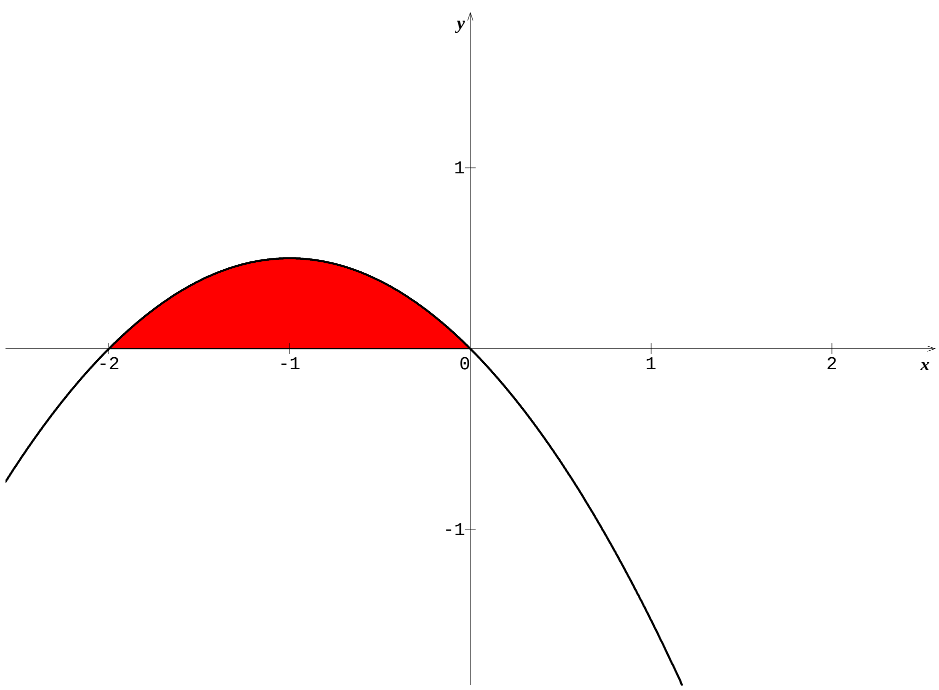
Soit f *une fonction continue et positive sur un segment* $[a,b]$ $(a<b)$ *et* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'aire du domaine délimité par la courbe* (C_f), *l'axe*

des abscisses et les droites d'équations $x = a$ *et* $x = b$ *est* : $A = \int_a^b f(x)\,dx$. *(exprimée en unités d'aire)*



Exemple 10 .

On considère la fonction g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* : $g(x) = \frac{-1}{2}x^2 - x$. *Dans la figure ci-dessous* (C_g) *est la courbe représentative de* g *dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *avec* $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 1,5cm$. *Puisque* $(\forall x \in [-2,0])$, $g(x) \geq 0$ *sur le segment* $[-2,0]$ *alors l'aire du domaine coloré est donnée par* : $A = \int_{-2}^{0} g(x)\,dx \quad \times ua \quad \left(ua = \frac{9}{4} = 2,25\right)$.



Or : $\displaystyle\int_0^{-2} g(x)\,dx = \int_0^{-2}\left(\frac{-1}{2}x^2 - x\right)dx = \left[-\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{-2} = \frac{2}{3}$. *Donc*

$$A = \frac{2}{3} \times 2,25cm^2 = 1,5cm^2$$

Techniques de calcul d'intégrales

Utilisation des primitives

Pour calculer une intégrale, on envisage en premier temps d'utiliser le tableau des primitives des fonctions usuelles et leurs propriétés.

Exemple 11 .

Calculons : $\displaystyle\int_2^6 \sqrt{2+x}dx$

On a : $\displaystyle\int_2^6 \sqrt{2+x}dx = \int_2^6 (2+x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}(2+x)^{\frac{3}{2}}\right]_2^6 = \frac{16}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

Intégration par parties

Propriété 12 .

Soit u *et* v *deux fonctions dérivables sur un intervalle* I *telles que ses dérivées* u' *et* v' *soient continues sur* I*. Alors pour tout* $(a,b) \in I^2$ *on a :*

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \left[u(x)\,v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx.$$

Exemple 13 .

Calculons les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_1^e x\ln x dx$, $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x dx$, $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)dt$ *et* $\displaystyle\int_1^2 xe^x dx$.

♣ *On pose :* $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$, *donc*

$$\begin{aligned} \int_1^e x\ln x dx &= \left[\ln x.\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e xdx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{e^2+1}{4} \end{aligned}$$

♣ *On pose* : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$, *donc*

$$\int_0^\pi x \sin x dx = [-x\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi$$

♣ *On pose* : $\begin{cases} u(x) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \\ v(x) = t \end{cases}$, *donc*

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{4}} \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) dt &= \left[t \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)\right]_0^{\frac{3}{4}} - \int_0^{\frac{3}{4}} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \frac{3}{4}\ln(2) - \left[\sqrt{t^2+1}\right]_0^{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{3}{4}\ln(2) - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

♣ *On pose* : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$ *donc*

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = 1$$

L'intégrale et l'ordre

Inégalité

Propriété 14 .
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. Alors :

♣ ***Positivité***

Si $f \geq 0$ *sur* $[a, b]$ *alors* : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

♣ ***Intégration d'une inégalité***

Si $f \leq g$ *sur* $[a, b]$ *alors* : $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Démonstration 15 .
Soit F une primitive de la fonction f sur $[a, b]$. Donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Puisque f est positive sur $[a, b]$, et $(\forall x \in [a, b])$, $F'(x) = f(x)$ alors la fonction F est croissante sur $[a, b]$, donc $F(b) - F(a) \geq 0$, d'où $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Si : $(\forall x \in [a,b])$, $f(x) \leq g(x)$, *alors* $\displaystyle\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geq 0$ *donc* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Exemple 16 .

1. *Encadrons l'intégrale suivante :* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx$

   On a $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \sin x \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\Big($*car* $\sin$ *est strictement croissante sur* $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\Big)$.
   Il s'ensuit donc que : $\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $1 \leq \dfrac{1}{\sin x} \leq \sqrt{2}$ *d'où*

   $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}dx.$$

   Ainsi : $\dfrac{\pi}{4} \leq \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

2. *Encadrons l'intégrale suivante :* $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

   On a $(\forall x \in [0,9])$, $1 \leq \sqrt{x} \leq 3$ $($*car* $x \longmapsto \sqrt{x}$ *est strictement croissante sur* $[0,9])$.
   Il d'ensuit donc que : $(\forall x \in [0,9])$, $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} \leq 1$ *d'où*

   $$\int_0^9 \frac{1}{4}dx \leq \int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx \leq \int_0^9 dx.$$

   Ainsi : $\dfrac{9}{4} \leq \displaystyle\int_0^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx \leq 9$.

Intégration et valeur absolue

Propriété 17 .

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a \leq b$. On a alors : $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Exemple 18 .

Encadrons : $A = \left|\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{2t+1}dt\right|$

On a : $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{2t+1}dt\right| \leq \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\sin(\pi t)}{2t+1}\right| dt$. *On sait que* $(\forall t \in [0,1])$, $|\sin(\pi t)| \leq 1$, *donc* $\left|\dfrac{\sin(\pi t)}{2t+1}\right| \leq \dfrac{1}{2t+1}$ *donc* $(\forall t \in [0,1])$, $A \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2t+1}dt$. *Comme* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2t+1}dt = \frac{1}{2}\left[\ln(2t+1)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$ *alors* $0 \leq A \leq \dfrac{\ln 3}{2}$.

Valeur Moyenne d'une fonction continue sur un segment

Propriété 19 .

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a \leq b$

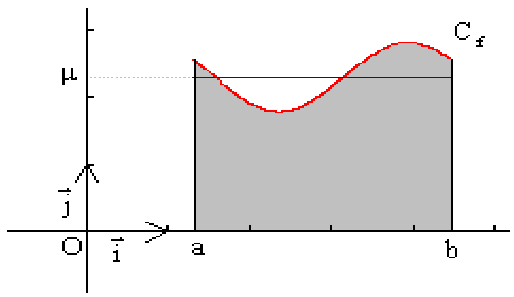
♣ *S'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors :* $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

♣ *S'il existe un réel M tels que pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$, alors :*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a).$$

Définition 20 .

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ $(a<b)$. La valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$ est le nombre réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.



Remarque 21 .

La formule $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ *est une généralisation de la formule* $\overline{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$ *donnant la moyenne arithmétique d'une série statistique.* (*T.C.S.I*)

Exemple 22 .

La valeur moyenne de la fonction $x \longmapsto x^3$ sur $[-1,3]$ est $\mu = \dfrac{1}{3+1}\int_{-1}^{3} x^3 dx = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{x^4}{4}\right]_{-1}^{3} =$ 5.

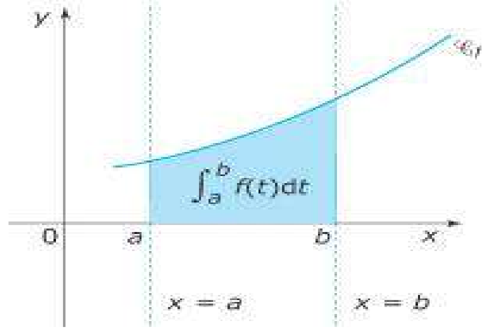
Application de calcul intégrale

Calcul des Aires

Propriété 23 .

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ $(a<b)$, et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses

et les droites d'équations $x = a$ *et* $x = b$ *est égale à* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *(en unité d'aire)*.
$\left(\text{unité d'aire et } ua = \left\|\overrightarrow{i}\right\| \times \left\|\overrightarrow{j}\right\|\right)$.



Exemple 24 .

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, déterminons l'aire du domaine (Δ) *délimité par la courbe de la fonction* $f : x \longmapsto \sin x$ *et les droites* $x = 0$ *et* $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

La fonction f *change de signe sur* $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$. *On a*

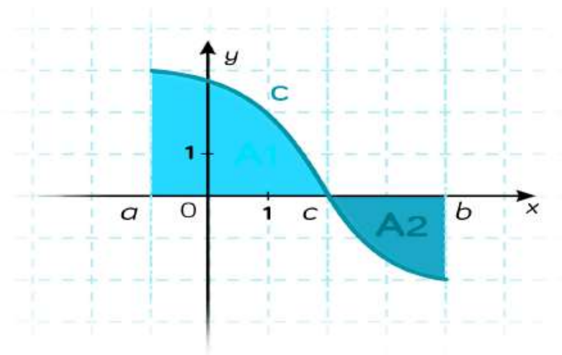
x	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
$sinx$	$+$	0	$-$

donc : $A(\Delta) = \displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|\,dx \times ua$ *(où est l'unité d'aire)*.
Or :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|\,dx &= \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|\,dx \\
&= \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x|\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx \\
&= [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Ainsi $A(\Delta) = 3 \times ua$.

Remarque 25 *Si la fonction* f *est positive et négative sur* $[a, b]$ *et il existe* c *sur* $[a, b]$ *tel* *que :* $f(c) = 0$.



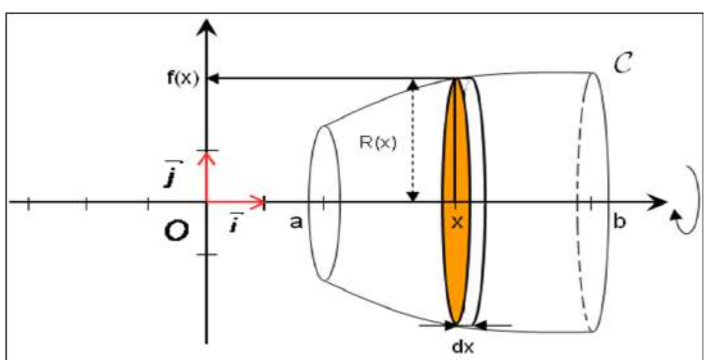
Donc $A = \left(\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \right) \times ua.$

Propriété 26 .

Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Soit f *et* g *deux fonctions continues sur un segment* $[a, b]$*. Soit* (C_f) *et* (C_g) *les courbes représentatives de* f *et* g *. Soit* (Δ) *le domaine délimité par les courbes* (C_f) *et* (C_g) *et les droites d'équations* $x = a$ *et* $x = b$*. Alors : L'aire du domaine* (Δ) *en unité d'aire est donnée par :* $A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$.

Calculs des volumes

- L'espace est muni d'un repére orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
- (C_f) la courbe d'une fonction continue sur $[a, b]$ avec $(a < b)$.
- On suppose que (C_f) tourne au tour de l'axe des abscisses de $360°$ la forme obtenue s'appelle le solide de révoluion.
- Le solide de révoluion obtenu à pour volume :



Propriété 27 .

L'espace est muni d'un repére orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Soit f *une fonction continue sur un segment* $[a, b]$ $(a < b)$*, et* (C_f) *sa courbe représentative dans le repère* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$*. Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe* (C_f)

autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par la formule :

$$V = \left(\int_a^b \pi \left(f\left(x\right)\right)^2 dx\right) \times (en\ unités\ de\ volume).$$

Exemple 28 .

L'espace est muni d'un repére orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, *tel que :* $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = \left\|\overrightarrow{k}\right\| = 1cm$

On considére la fonction $f(x) = x - 5$ *sur* $[-1, 2]$ *et* (C_f) *sa courbe représentative dans le repére* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction $f : x \longmapsto x-5$ *sur* $[-1, 2]$ *autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par :* $V = \left(\int_{-1}^{2} \pi(x-5)^2 dx\right) \times uv$

On a : $\displaystyle\int_{-1}^{2} \pi(x-5)^2 dx = \pi \int_{-1}^{2} (x-5)^2 dx = \pi \left[\frac{(x-5)^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 63\pi,$ *donc* $V = 63\pi cm^3$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com