Devoir Surveillé N2 / Durée 2H

EXERCICE 1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $u_0 = \dfrac{3}{2}$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n+3}$

1. **a)** *Calculer* u_1 *et* u_2.
   b) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n > 1$.
2. *Étudier la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.
   a) *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $q = \dfrac{4}{3}$ *et calculer* v_0.
   b) *Exprimer* v_n *en fonction de* n, *puis en déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n = \dfrac{3}{3 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$.
4. *On pose :* $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ *où* $n \in \mathbb{N}$. *Calculer* S_n *en fonction de* n.

EXERCICE 2 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $u_0 = \dfrac{3}{2}$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1}$.

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n \geq 1$.
2. **a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$.
   b) *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 \leq u_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

EXERCICE 3 *Soit* ABC *un triangle, et soit* G *le barycentre du système pondéré* $\{(A,3), (B,-1), (C,2)\}$
Soit I *le barycentre du système pondéré* $\{(A,3), (B,-1)\}$, *et soit* K *le barycentre du système pondéré* $\{(B,-1), (C,2)\}$.

1. *Exprimer* $\overrightarrow{AG}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$, *puis montrer que :* $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AI} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$
2. *Construire les points* G, K *et* I.
3. *Montrer que* G *est le milieu du segment* $[CI]$.
4. *Montrer que :* $G \in (AK)$.
5. *Soit* F *le barycentre des points* $(A,3)$ *et* $(C,2)$. *Montrer que :* $G \in (BF)$, *puis déduire que les droites* (CI), (AK) *et* (BF) *sont sécantes en un point qu'on déterminera.*