

Devoir Surveillé N1 (S2)

EXERCICE 1 (5 points)

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin^2 x}{1 - \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1 - 2 \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{\sin 3x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

EXERCICE 2 (2 points)

Soit m un réel.

Discuter, suivant les valeurs de m , l'existence et la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5} - mx$.

EXERCICE 3 (6 points)

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1+x^2}}{2+x} & ; x \geq 0 \\ f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{2+\sin x}}{x} & ; x < 0 \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Que peut-on conclure ?

3. a) Montrer que : $(\forall x \in]-\infty, 0[), |f(x)| \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{|x|}$

b) Dédurre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

EXERCICE 4 (7 points)

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{2 - \sqrt{3} + x} & \text{si } x > 1 \\ f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{2x^2 + x - 3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que : $D_f =]-\infty, \frac{-3}{2}[\cup]\frac{-3}{2}, 1[\cup]1, +\infty[$

2. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3. Calculer : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Que peut-on conclure ?

4. Étudier la limite de la fonction f au point $x_1 = \frac{-3}{2}$.