CORRECTION SÉRIE N1

EXERCICE 1 .

1. *Soit* $z \in \mathbb{C}$, *on a*

$$\begin{aligned} |z-1+i| &= |z+2-i| \\ &\Longleftrightarrow |z-(1-i)| = |z-(-2+i)| \\ &\Longleftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \quad / \quad \textit{Notons } A(1-i) \quad \textit{et} \quad B(-2+i) \\ &\Longleftrightarrow AM = BM \end{aligned}$$

donc l'ensemble des points $M(z)$ *est la droite médiatrice du segment* $[AB]$

2. *Soit* $z \in \mathbb{C}$, *on a*

$$\begin{aligned} |iz+1-i| &= |z+3| \\ &\Longleftrightarrow \left|i\left(z+\frac{1}{i}-1\right)\right| = |z+3| \\ &\Longleftrightarrow |i|\left|z+\frac{1}{i}-1\right| = |z+3| \\ &\Longleftrightarrow |z-i-1| = |z+3| \\ &\Longleftrightarrow |z-(1+i)| = |z-(-3)| \\ &\Longleftrightarrow |z-z_I| = |z-z_F| \quad / \quad \textit{Notons } I(1+i) \quad \textit{et} \quad F(-3) \\ &\Longleftrightarrow IM = FM \end{aligned}$$

donc l'ensemble des points $M(z)$ *est la droite médiatrice du segment* $[IF]$.

3. *Soit* $z \in \mathbb{C}$, *on a*

$$\begin{aligned} |\overline{z}+2-i| &= 2 \\ &\Longleftrightarrow \left|\overline{z+2+i}\right| = 2 \\ &\Longleftrightarrow |z+2+i| = 2 \\ &\Longleftrightarrow |z-(-2-i)| = 2 \\ &\Longleftrightarrow |z-z_J| = 2 \quad / \quad \textit{Notons } J(-2-i) \\ &\Longleftrightarrow JM = 2 \\ &\Longleftrightarrow M \textit{ appartient au cercle de centre } J \textit{ et de rayon } 2 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des points $M(z)$ *est le cercle de centre* J *et de rayon* 2.

EXERCICE 2 .

1. *Déterminons l'ensemble* (E_1) *tels que* $Z \in \mathbb{R}$:

   Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ *,on a*

$$\begin{aligned}
Z \in \mathbb{R} &\iff Z = \overline{Z} \\
&\iff \frac{z+i}{z-2i} = \overline{\frac{z+i}{z-2i}} \\
&\iff \frac{z+i}{z-2i} = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+2i} \\
&\iff (z+i)(\overline{z}+2i) = (\overline{z}-i)(z-2i) \\
&\iff z\overline{z}+2iz+i\overline{z}-2 = \overline{z}z-2i\overline{z}-iz-2 \\
&\iff 2iz+i\overline{z}+2i\overline{z}+iz = 0 \\
&\iff 2i(z+\overline{z})+i(z+\overline{z}) = 0 \\
&\iff 3i(z+\overline{z}) = 0 \\
&\iff z+\overline{z} = 0 \\
&\iff \mathrm{Re}(z) = 0
\end{aligned}$$

   donc l'ensemble (E_1) *est l'axe des ordonnées, sauf le point* $(0,2)$.

2. *Déterminons l'ensemble* (E_2) *tels que* $Z \in i\mathbb{R}$:

   Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ *,on a*

$$\begin{aligned}
Z \in i\mathbb{R} &\iff Z = -\overline{Z} \\
&\iff \frac{z+i}{z-2i} = -\overline{\frac{z+i}{z-2i}} \\
&\iff \frac{z+i}{z-2i} = -\frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+2i} \\
&\iff \frac{z+i}{z-2i} = \frac{-\overline{z}+i}{\overline{z}+2i} \\
&\iff (z+i)(\overline{z}+2i) = (-\overline{z}+i)(z-2i) \\
&\iff z\overline{z}+2iz+i\overline{z}-2 = -\overline{z}z+2i\overline{z}+iz+2 \\
&\iff 2z\overline{z}+2iz-2i\overline{z}+i\overline{z}-iz-4 = 0 \\
&\iff 2z\overline{z}-4+2i(z-\overline{z})-i(z-\overline{z}) = 0 \\
&\iff 2z\overline{z}-4+i(z-\overline{z}) = 0
\end{aligned}$$

   on pose $z = x+iy \ / \ (x,y) \neq (0,2)$ *alors*

$$\begin{aligned}
Z \in i\mathbb{R} &\iff 2\left(x^2+y^2\right)-4+i2iy = 0 \\
&\iff 2\left(x^2+y^2\right)-4-2y = 0 \quad et \quad (x,y) \neq (0,2) \\
&\iff x^2+y^2-2-y = 0 \quad et \quad (x,y) \neq (0,2) \\
&\iff x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \quad et \quad (x,y) \neq (0,2)
\end{aligned}$$

   donc (E_2) *est le cercle* (C) *de centre* $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$, *de rayon* $\frac{3}{2}$ *privé du point* $B(0,2)$.

EXERCICE 3 .

1. *Écrivons* z_1 *et* z_2 *sous forme trigonométrique :*
   On a : $|z_1| = \sqrt{2}$ *et* $|z_2| = 2$ *donc*

$$\begin{aligned} z_1 &= 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ z_2 &= \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) \end{aligned}$$

2. *Écrivons* $z_1 \times z_2$ *sous forme trigonométrique :*
   On a : $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2\sqrt{2}$ *et*

$$\begin{aligned} \arg(z_1 \times z_2) &\equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{12}\,[2\pi] \end{aligned}$$

   donc $z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

3. *Déduisons* $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$:
   Déterminons une forme algébrique du nombres complexe : $z_1 \times z_2$
   On a : $z_1 \times z_2 = (1+i)\left(\sqrt{3} - i\right) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1 = 1 + \sqrt{3} + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$ *donc*

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

EXERCICE 4 .

Déterminons la forme algébrique de $\dfrac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}+i\right)^3}$:

On a : $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ *et* $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ *alors*

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{4}\right)\right) = -4 \quad , \left(\sqrt{3}+i\right)^3 = 2^3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)\right) = 8i$$

donc

$$\frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}+i\right)^3} = \frac{-4}{8i} = \frac{1}{2}i$$

EXERCICE 5 .

Considèrons les points A, B, C et D d'affixes repectives : $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -z_1$, $z_3 = \sqrt{3} + 3i$ *et* $z_4 = \overline{z_3}$.

1. *Calculons :* $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}$

   On a : $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} = \dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)-\left(\sqrt{3}+3i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)-\left(\overline{\sqrt{3}+3i}\right)} = \dfrac{-i-3i}{\left(\sqrt{3}-i\right)-\left(\sqrt{3}-3i\right)} = \dfrac{-4i}{-i+3i} = \dfrac{4i}{2i} =$
   2.

   Déduisons que les points A, C et D sont alignés.

   On a : $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} = 2$, *alors* $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R}^*$ *donc les points A, C et D sont alignés.*

2. *Vérifions que :* $\dfrac{z_3 - z_1}{z_3 + z_1} = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

   On a :

$$
\begin{aligned}
\frac{z_3 - z_1}{z_3 + z_1} &= \frac{\left(\sqrt{3}+3i\right)-\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+3i\right)+\left(\sqrt{3}-i\right)} \\
&= \frac{4i}{2\sqrt{3}+2i} \\
&= \frac{2i}{\sqrt{3}+i} \\
&= \frac{2i\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)} \\
&= \frac{2i\left(\sqrt{3}-i\right)}{4} \\
&= \frac{2\sqrt{3}i+2}{4} \\
&= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

   Déterminons la mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right)$:

On a

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right) &\equiv \arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg\left(\frac{z_1-z_3}{-z_1-z_3}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_3+z_1}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)[2\pi] \\
&\equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \quad / \; \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

donc $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ *d'où une mesure de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right)$ *est* $\frac{\pi}{3}$.

3. *Montrons que le triangle ABC est équilatéral*

   On a $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$, *donc il suffit de montrer que le triangle ABC est isocèle en C.*

   On a :

$$\begin{aligned}
CB &= |z_2-z_3| \\
&= \left|-z_1-\left(\sqrt{3}+3i\right)\right| \\
&= \left|-\left(\sqrt{3}-i\right)-\left(\sqrt{3}+3i\right)\right| \\
&= \left|-2\sqrt{3}-2i\right| \\
&= \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2} \\
&= \sqrt{12+4} \\
&= \sqrt{16} \\
&= 4
\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}
CA &= |z_1-z_3| \\
&= \left|\left(\sqrt{3}-i\right)-\left(\sqrt{3}+3i\right)\right| \\
&= |-4i| \\
&= 4
\end{aligned}$$

donc $CA = CB$, *ceci signifie que le triangle* ABC *est isocèle en* C *et comme* $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ *d'où le triangle* ABC *est équilatéral.*

EXERCICE 6 .

1. *Résolvons dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2 - 2z + 4 = 0$.

   On a : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 < 0$, *donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :*

   $$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + i\sqrt{12}}{2} = 1 + i\sqrt{3} \quad \textit{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = 1 - i\sqrt{3}$$

   donc

   $$S = \left\{1 + i\sqrt{3},\ 1 - i\sqrt{3}\right\}$$

2. *On a :* $|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$ *et* $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ *donc* $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

   On a : $|z_2| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$ *et* $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ *donc* $\arg(z_1) \equiv \frac{-\pi}{3}\,[2\pi]$.

3. *On a :* $|z_1^2| = |z_1|^2 = 4$ *et* $\arg(z_1^2) \equiv 2\arg(z_1)\,[2\pi]$ *donc* $\arg(z_1^2) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

   On a : $|z_2^2| = |z_2|^2 = 4$ *et* $\arg(z_2^2) \equiv 2\arg(z_2)\,[2\pi]$ *donc* $\arg(z_2^2) \equiv \frac{-2\pi}{3}\,[2\pi]$.

4. *Montrons que le triangle* $AA'B'$ *est rectangle.*

   On a :

   $$\begin{aligned} \frac{z_{B'} - z_A}{z_{A'} - z_A} &= \frac{\left(-2 - 2i\sqrt{3}\right) - \left(1 + i\sqrt{3}\right)}{\left(-2 + 2i\sqrt{3}\right) - \left(1 + i\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{-3 - 3i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} \\ &= \frac{\left(-3 - 3i\sqrt{3}\right)\left(-3 - i\sqrt{3}\right)}{\left(-3 + i\sqrt{3}\right)\left(-3 - i\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{9 + 3i\sqrt{3} + 9i\sqrt{3} - 9}{9 + 3} \\ &= \frac{12i\sqrt{3}}{12} \\ &= i\sqrt{3} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB'}\right) &\equiv \arg\left(\frac{z_{B'} - z_A}{z_{A'} - z_A}\right) [2\pi] \\ &\equiv \arg\left(i\sqrt{3}\right) [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]\end{aligned}$$

d'où $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} [2\pi]$, *ceci signifie que le triangle* $AA'B'$ *est rectangle.*

5. *Déterminons l'ensemble des points* $M(z)$ *vérifiant* $\left|z - 1 + i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$:
   Soit $z \in \mathbb{C}$, *on a*

$$\begin{aligned}\left|z - 1 + i\sqrt{3}\right| &= 2\sqrt{3} \\ &\iff \left|z - \left(1 - i\sqrt{3}\right)\right| = 2\sqrt{3} \\ &\iff |z - z_B| = 2\sqrt{3} \\ &\iff BM = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

L'ensemble des points d'affixe z *vérifiant* $\left|z - 1 + i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$ *est donc le cercle de centre* B *et de rayon* $2\sqrt{3}$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**