Professeur : Yahya MATIOUI

CORRECTION DEVOIR SURVEILLÉ

EXERCICE 1 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n+3} \\ u_0 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

1. **a)** *On a :* $u_1 = \dfrac{4u_0}{u_0+3} = \dfrac{4\times\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+3} = \dfrac{4}{3}$ *et* $u_2 = \dfrac{4u_1}{u_1+3} = \dfrac{4\times\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}+3} = \dfrac{16}{13}$.

   b) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > 1$.

   Pour $n = 0$*, on a* $u_0 = \dfrac{3}{2}$ *et comme* $u_0 > 1$ *donc la proposition est vraie pour* $n = 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$*. On suppose que* $u_n > 1$ *et on montre que* $u_{n+1} > 1$.

   On a :
   $$u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n}{u_n+3} - 1 = \frac{4u_n - (u_n+3)}{u_n+3} = \frac{3(u_n-1)}{u_n+3}$$
   et comme $u_n > 1$ *alors* $u_n - 1 > 0$ *donc* $\begin{cases} 3(u_n-1) > 0 \\ u_n+3 > 0 \end{cases}$ *d'où* $\dfrac{3(u_n-1)}{u_n+3} > 0$ *c'est-à-dire* $u_{n+1} > 1$.

   On conclut d'après le principe de récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > 1$.

2. *Étudions la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

   Soit $n \in \mathbb{N}$*, on a*
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4u_n}{u_n+3} - u_n \\ &= \frac{4u_n - u_n(u_n+3)}{u_n+3} \\ &= \frac{4u_n - u_n^2 - 3u_n}{u_n+3} \\ &= \frac{u_n - u_n^2}{u_n+3} \\ &= \frac{u_n(1-u_n)}{u_n+3} \end{aligned}$$

et comme $u_n > 1$ *alors* $1 - u_n < 0$ *donc* $\begin{cases} u_n(1-u_n) < 0 \\ \\ u_n + 3 > 0 \end{cases}$ *par suite* $\dfrac{u_n(1-u_n)}{u_n+3} < 0$
d'où $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} - u_n < 0$. *C'est-à-dire la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante.*

3. $(\forall n \in \mathbb{N})$, *on pose* $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.

a) *Montrons que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique*

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} \\ &= \frac{\dfrac{4u_n}{u_n+3}}{\dfrac{4u_n}{u_n+3} - 1} \\ &= \frac{\dfrac{4u_n}{u_n+3}}{\dfrac{3u_n-3}{u_n+3}} \\ &= \frac{4u_n}{3u_n-3} \\ &= \frac{4u_n}{3(u_n-1)} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{u_n}{u_n-1} \\ &= \frac{4}{3} \times v_n \end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$, $v_{n+1} = \dfrac{4}{3} \times v_n$, *d'où la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $q = \dfrac{4}{3}$ *et de premier* $v_0 = \dfrac{u_0}{u_0 - 1} = 3$.

b) *Exprimons* v_n *en fonction de* n

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $v_n = v_0 \times q^n$ *donc* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $v_n = 3 \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.

Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n = \dfrac{3}{3 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{u_n}{u_n - 1} \\
&\Longleftrightarrow v_n\left(u_n - 1\right) = u_n \\
&\Longleftrightarrow v_n \times u_n - v_n = u_n \\
&\Longleftrightarrow v_n \times u_n - u_n = v_n \\
&\Longleftrightarrow u_n\left(v_n - 1\right) = v_n \\
&\Longleftrightarrow u_n = \frac{v_n}{v_n - 1} \\
&\Longleftrightarrow u_n = \frac{3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n}{3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n - 1} \\
&\Longleftrightarrow u_n = \frac{3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n}{\left(\frac{4}{3}\right)^n \left(3 - \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}\right)} \\
&\Longleftrightarrow u_n = \frac{3}{3 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}
\end{aligned}$$

donc : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right),\ u_n = \dfrac{3}{3 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}.$

4. *On pose :* $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right),\ S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n \quad$ (*où* $n \in \mathbb{N}$). *Calculons* S_n *en fonction de* n *:*

   Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned}
S_n &= v_0 + v_1 + ... + v_n \\
&= v_0 \times \frac{1 - q^{n-0+1}}{1 - q} \\
&= 3 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{3}} \\
&= 3 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}}{\frac{-1}{3}} \\
&= 9\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - 1\right)
\end{aligned}$$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\,, \quad S_n = 9\left(\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1} - 1\right).$

EXERCICE 2 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N})\,, \ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1} \\ \\ u_0 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

1. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,, u_n \geq 1.$

   Pour $n = 0$*, on a* $u_0 = \dfrac{3}{2}$ *et comme* $u_0 \geq 1$ *donc la proposition est vraie pour* $n = 0.$

   Soit $n \in \mathbb{N}$*. On suppose que* $u_n \geq 1$ *et on montre que* $u_{n+1} \geq 1.$

   On a :
   $$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1} - 1 = \frac{u_n^2 + u_n - (u_n^2 + 1)}{u_n^2 + 1} = \frac{u_n - 1}{u_n^2 + 1}$$

   et comme $u_n \geq 1$ *alors* $u_n - 1 \geq 0$ *donc* $\begin{cases} u_n - 1 \geq 0 \\ \\ u_n^2 + 1 > 0 \end{cases}$ *d'où* $\dfrac{u_n - 1}{u_n^2 + 1} \geq 0$ *c'est-à-dire* $u_{n+1} \geq 1.$

   On conclut d'après le principe de récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,, u_n \geq 1.$

2. **a)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,, u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$

   MÉTHODE 1

   Soit $n \in \mathbb{N}$*, on a*
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 - \frac{1}{2}(u_n - 1) &= \frac{u_n - 1}{u_n^2 + 1} - \frac{1}{2}(u_n - 1) \\ &= (u_n - 1)\left(\frac{1}{u_n^2 + 1} - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

   on a : $u_n \geq 1$ *alors* $u_n^2 + 1 \geq 2$ *par suite* $\dfrac{1}{u_n^2 + 1} \leq \dfrac{1}{2}$ *donc* $\begin{cases} \dfrac{1}{u_n^2 + 1} - \dfrac{1}{2} \leq 0 \\ \\ u_n - 1 \geq 0 \end{cases}$

   d'où $(u_n - 1)\left(\dfrac{1}{u_n^2 + 1} - \dfrac{1}{2}\right) \leq 0$ *c'est-à-dire*
   $$(\forall n \in \mathbb{N})\,, u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

   MÉTHODE 2

   Soit $n \in \mathbb{N}$*, on a :* $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n - 1}{u_n^2 + 1} = (u_n - 1) \times \dfrac{1}{u_n^2 + 1}$

comme $u_n \geq 1$ *alors* $u_n^2 + 1 \geq 2$ *par suite* $\dfrac{1}{u_n^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$ *donc* $(u_n - 1) \times \dfrac{1}{u_n^2+1} \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$ *d'où* $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$.

b) *Déduisons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 \leq u_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Pour $n = 0$, *on a* $u_0 - 1 = \dfrac{1}{2}$ *et comme* $0 \leq u_0 - 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ *donc la proposition est vraie pour* $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $0 \leq u_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *et on montre que* $0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

On a : $u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$ *et comme* $0 \leq u_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *alors* $0 \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 1) \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ *par suite* $0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

On conclut d'après le principe de récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 \leq u_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

EXERCICE 3 .

1. *Exprimons* $\overrightarrow{AG}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$:

   On a G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$ *donc d'après la propriété caractéristique :*

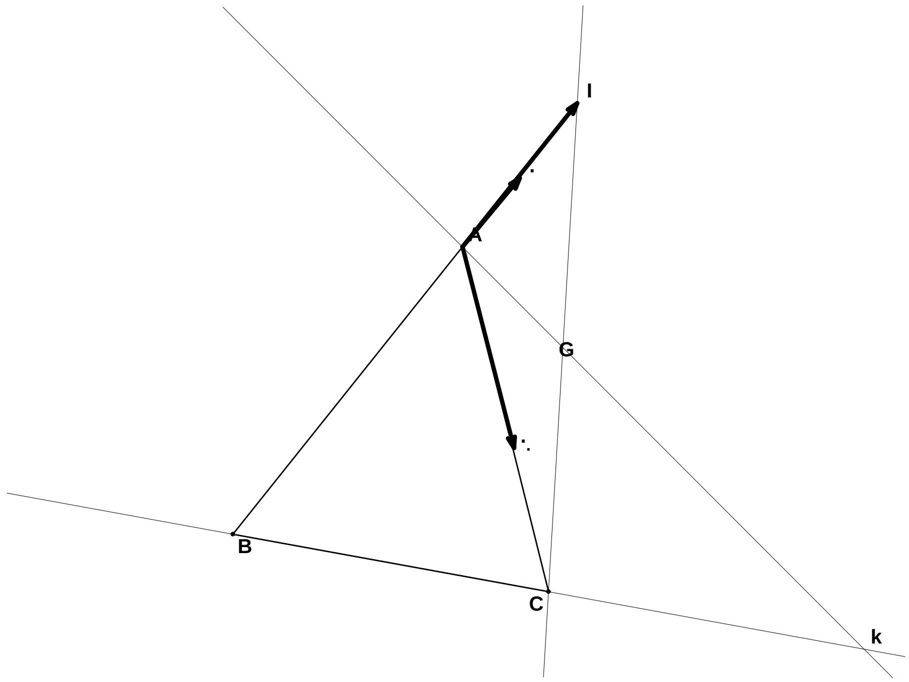
$$(\forall M \in (P)),\quad 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$$

   pour $M = A$, *on obtient* $-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AG}$ *donc* $\overrightarrow{AG} = \dfrac{-1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

   On a I *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,3);(B,-1)\}$ *donc* $(\forall M \in (P))$, $3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ *d'où* $\overrightarrow{AI} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB}$ $($*pour* $M = A)$.

   De même on montre que : $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BC}$.

2. *Construisons les points G, K et I :*



3. *Montrons que G est le milieu du segment $[CI]$:*

   On a G est le barycentre du système pondéré $\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$ et comme I est le barycentre du système pondéré $\{(A,3);(B,-1)\}$ alors d'après l'associativité du barycentre on en déduit que G est le barycentre du système pondéré $\{(I,2);(C,2)\}$ de plus G est le barycentre du système pondéré $\{(I,1);(C,1)\}$ d'où G est le milieu du segment $[CI]$.

4. *Montrons que : $G \in (AK)$.*

   On a G est le barycentre du système pondéré $\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$ et comme K est le barycentre du système pondéré $\{(B,-1);(C,2)\}$ alors d'après l'associativité du barycentre on en déduit que G est le barycentre du système pondéré $\{(K,1);(A,3)\}$ ceci signifie que $G \in (AK)$.

5. *Soit F le barycentre des points $(A,3)$ et $(C,2)$. Montrons que : $G \in (BF)$.*

   On a G est le barycentre du système pondéré $\{(A,3);(B,-1);(C,2)\}$ et comme F est le barycentre du système pondéré $\{(A,3);(C,2)\}$ alors d'après l'associativité du barycentre on en déduit que G est le barycentre du système pondéré $\{(F,5);(B,-1)\}$ ceci signifie que $G \in (BF)$.

   Déduisons que les droites (CI), (AK) et (BF) sont sécantes.

   On a : $G \in (CI)$, $G \in (AK)$ et $G \in (BF)$ donc les droites (CI), (AK) et (BF) sont sécantes en point G.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**