Devoir Surveillé N2

Problème d'analyse (13 **points**)

Partie 01. *On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par :* $h(x) = e^x - x - 1$.

1. *Calculer $h'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis en déduire que h est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.* $(2pts)$

2. *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}), h(x) \geq 0$, *puis déduire que :* $(\forall x \in \mathbb{R}), e^x - x > 0$.

Partie 02 *On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par :* $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

1. *Vérifier que :* $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$, *puis déduire que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1$. $(1pt)$

   On admet le résultat suivant : la fonction f est strictement croissante sur $[0, 1]$.

2. *Montrer que :* $(\forall x \in [0, 1]), \quad f(x) \in [0, 1]$.

3. *Soit (D) la droite d'équation :* $y = x$.

   a) *Montrer que :* $(\forall x \in [0, 1]), f(x) - x = \dfrac{(1-x)h(x)}{e^x - x}$, *puis étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[0, 1]$.*

   b) *Déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) sur l'intervalle $[0, 1]$.*

4. *On considère la suite (u_n) définie par :* $u_0 = \dfrac{1}{2}$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

a) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}) : \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$. $(1pt)$

b) *Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis montrer qu'elle est convergente.* $(1,5pts)$

c) *Montrer que :* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 1$. $(1pt)$

Exercice 1 (7 ***points***). *Le plan complexe est muni d'un repére orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :* $(E) : z^2 - 6z + 18 = 0$. $(1,5pts)$

2. *On considére les points A et B d'affixes respectives :* $a = 3 + 3i$, $b = 3 - 3i$.

   a) *Ecrire sous la forme trigonométrique chacun des deux nombres complexes : a et b.*

3. *On considére la translation T de vecteur $\overrightarrow{OA}$.*

   a) *Montrer que b' l'affixe du point B' image du point B par la translation T est :* 6.

   b) *Montrer que :* $\frac{b - b'}{a - b'} = i$, *puis en déduire que le triangle $AB'B$ est rectangle isocèle en B'.* $(2pts)$

   c) *Déduire de ce qui précéde que le quadrilatére $OAB'B$ est un carré.*