Devoir Surveillé N3

Problème d'analyse (20 *points*)

Partie 01 (5*pts*)

Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x-2\ln x$

1. **a)** *Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$.*
   b) *Montrer que g est décroissante sur $]0,2]$ et croissante sur $[2,+\infty[$.*
2. **a)** *Déduire que* : $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\,,\ g(x)>0$.
   b) *Montrer que* : $(\forall x\in\,]0,+\infty[),\ \dfrac{\ln x^2}{x}<1$.

Partie 02 (15 *pts*)

On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-(\ln x)^2$

1. **a)** *Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement le résultat obtenu.*
   b) *Montrer que* : $(\forall x\in\,]0,+\infty[),\ \dfrac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$, *puis déduire que* : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$.
   c) *Déduire que* : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$.
   d) *Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(f(x)-x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*
   e) *Étudier la position relative de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.*
2. **a)** *Montrer que* : $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\,,\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$, *puis montrer que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.*
   b) *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*
3. *Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$,puis vérifier que $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$.*
4. *Déduire le signe de la fonction f sur $]0,+\infty[$.*
5. *Tracer le droite (Δ) et la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.*
6. *Justifier puis détreminer les primitives de la fonction $h:x\longmapsto\dfrac{\ln x}{x}+x^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.*