Correction devoir surveillé N2

Problème d'analyse 1 .

Partie 01 .

On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - x - 1$.

1) *Les fonctions $u : x \longmapsto e^x$ et $v : x \longmapsto -x-1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $h = u + v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a* $(\forall x \in \mathbb{R})$, $h'(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1$.

Déduisons la monotonie de h sur les intervalles : $[0, +\infty[$ *et* $]-\infty, 0]$:

On a : $x \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff h'(x) \geq 0$. *Donc, la fonction h est croissante sur* $[0, +\infty[$. *De même on a :* $x \leq 0 \iff e^x \leq 1 \iff h'(x) \leq 0$. *Donc, la fonction h est décroissante sur* $]-\infty, 0]$.

Déduisons le T.V :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) *Montrons que* : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $h(x) \geq 0$.

On déduit que $h(0) = 0$ est la valeur minimale absolue de la fonction h sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $(\forall x \in \mathbb{R})$, $h(x) \geq 0$, *donc* $(\forall x \in \mathbb{R})$, $e^x - x > 0$.

Partie 02 .

On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.

1) *Vérifions que* : $(\forall x \in [0, +\infty[)$, $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.

$$\text{Soit } x \in [0, +\infty[\text{, on a : } f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{e^x\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right)} = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$$

Déduisons $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$:

On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{1-e^{-x}}{1-\dfrac{x}{e^x}} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{1-e^{-x}}{1-\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}}}$ *, et comme*

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} e^{-x} = 0$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{1-e^{-x}}{1-\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}}} = 1$ *d'où* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 1.$

On admet le résultat suivant : la fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$.

2) *Montrons que :* $(\forall x \in [0,1])$, $f(x) \in [0,1]$.

La fonction f *est continue et strictement croissante sur* $[0,1]$*, alors* $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ *et comme* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$ *donc* $0 \leq f(x) \leq 1$ *d'où* $f(x) \in [0,1]$.

3) *Soit* (D) *la droite d'équation :* $y = x$.

a) *Montrons que :* $(\forall x \in [0,1])$: $f(x) - x = \dfrac{(1-x)h(x)}{e^x - x}$

Soit $x \in [0,1]$, *on a*

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x \\ &= \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x} \\ &= \frac{e^x(1-x) - (1-x^2)}{e^x - x} \\ &= \frac{(1-x)(e^x - (1+x))}{e^x - x} \\ &= \frac{(1-x)(e^x - 1 - x)}{e^x - x} \\ &= \frac{(1-x)h(x)}{e^x - x} \end{aligned}$$

Étudions le signe de $f(x) - x$ *sur* $[0,1]$:
Le signe de $f(x) - x$ *sur* $[0,1]$ *est le même que celui de* $1-x$.
(*car* $(\forall x \in [0,1])$, $h(x) \geq 0$ et $(\forall x \in [0,1])$, $e^x - x > 0$)
ceci signifie que que le signe de $f(x) - x$ *sur l'intervalle* $[0,1]$ *est celui de* $1-x$.
On a

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$1-x$			$+$	0	$-$	

donc $(\forall x \in [0,1])$, $f(x) - x \geq 0$.

b) *Déduisons la position relative de la courbe* (C_f) *et la droite* (D) *sur l'intervalle* $[0,1]$.

On a : $(\forall x \in [0,1])\,,\quad f(x) - x \geq 0,$ *et :* $f(x) - x = 0 \iff x = 0$ *ou* $x = 1$.
Donc

- *La courbe* (C_f) *est au-dessus de la droite* (D) *sur* $]0,1[$.
- $(C) \cap (D) = \{A(0,0)\,,\ B(1,1)\}$.

4) *On considère la suite* (u_n) *définie par :* $u_0 = \dfrac{1}{2}$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}) : \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

1. *Pour* $n = 0$, *on a* $u_0 = \dfrac{1}{2}$ *et comme* $\dfrac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$. *Alors l'encadrement est vrai pour* $n = 0$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, *on suppose que* $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$, *et montrons que :* $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$.
   On a : $\dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ *et comme la fonction* f *est strictement croissante sur* $[0,1]$ *alors* $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(1)$ *et comme* $(\forall x \in [0,1])\,,\ f(x) \geq x$ *alors* $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \geq \dfrac{1}{2}$ *et* $f(1) = 1$ *donc* $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$.
   D'après le principe de récurrence on déduit que: $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

b) *On a* $(\forall x \in [0,1])\,,\ f(x) \geq x$ *et comme* $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, donc $f(u_n) \geq u_n$ c'est-à-dire $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} \geq u_n$. *D'où la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante, et puisqu'elle est majorée par* 1, *alors elle est convergente.*

c) *Montrons que :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = f(u_n)$ *telle que* $u_0 \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. *On a* f *est continue sur* $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ *et* $f\left(\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ *et comme la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et sa limite* ℓ $\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell\right)$ *est une solution de l'équation* $f(x) = x$ *dans* $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Soit $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, *on a*

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x \\ & \Longleftrightarrow & f(x) - x = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \dfrac{(1-x)h(x)}{e^x - x} = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (1-x)h(x) = 0 \quad / \; e^x - x > 0. \\ & \Longleftrightarrow & x = 1 \text{ ou } h(x) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x = 1 \text{ ou } x = 0 \end{array}$$

donc $\ell = 0$ *et* $\ell = 1$ *et comme la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante alors* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n \geq u_0$ *donc* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n \geq \dfrac{1}{2}$ *par suite* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \geq \dfrac{1}{2}$ *c'est-à-dire* $\ell \geq \dfrac{1}{2}$ *d'où*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1$$

Exercise 2 .

1. *On résout dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $(E) : z^2 - 6z + 18 = 0$.

   On a $a = 1$, $b = -6$ *et* $c = 18$, *Calculons* Δ :

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & b^2 - 4ac \\ & = & (-6)^2 - 4 \times 1 \times 18 \\ & = & 36 - 72 \\ & = & -36 < 0 \end{array}$$

   Donc l'équation (E) *admet deux solutions complexes conjuguées* z_1 *et* z_2 :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{6 + i\sqrt{36}}{2} = \frac{6+6i}{2} = 3 + 3i$$

   et comme : $z_2 = \overline{z_1} = \left(\overline{3+3i}\right) = 3 - 3i$. *Donc*

$$S = \{3 + 3i, 3 - 3i\}$$

2. *On considère les points* A *et* B *d'affixes respectives :* $a = 3 + 3i$ *et* $b = 3 - 3i$.

   a) *La forme trigonométrique des deux nombres complexes :* a *et* b.

   - *On a :* $|a| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ *,alors*

$$a = 3{+}3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}} + i\frac{3}{3\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

- *On a* : $|b|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. *Donc*

$$b=3-3i=3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}-i\frac{3}{3\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

3. *On considère la translation T de vecteur $\overrightarrow{OA}$.*

a) *Montrons que b' l'affixe du point B' image du point B par la translation T est* : 6.
On a

$$\begin{aligned} T(B) &= B' \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OA} \\ &\Longleftrightarrow b'-b=a-o \\ &\Longleftrightarrow b'=b+a=6 \end{aligned}$$

b) *Montrons que* : $\dfrac{b-b'}{a-b'}=i$
On a

$$\frac{b-b'}{a-b'}=\frac{(3-3i)-6}{3+3i-6}=\frac{-3(i+1)}{3(i-1)}=\frac{-(i+1)}{i-1}=\frac{-(i+1)(i+1)}{-2}=\frac{(i+1)^2}{2}=i$$

Déduisons la nature du triangle $AB'B$.
On a

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'B}\right) &\equiv \arg\left(\frac{b-b'}{a-b'}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg(i)\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{aligned}$$

donc: $\left(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'B}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$, *on conclut que le triangle $AB'B$ est rectangle en B'.*
D'autre part, on a: $\left|\dfrac{b-b'}{a-b'}\right|=|i|=1$, *donc $B'B=B'A$. On conclut que le triangle $AB'B$ est isocèle en B', et comme il est rectangle en même point, alors le triangle $AB'B$ est rectangle isocèle en B'.*

c) *Déduisons la nature du quadrilatére $OAB'B$.*
On a : $(B'A)\perp(B'B)$ *et* $OB=AB'=B'B=OA$. *Ceci singifie le quadrilatére $OAB'B$ est un carré.*

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

www.etude – generale.com