Correction Devoir Surveillé N3

PROBLEME 1 (20 *points*)

Partie 01 *Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x-2\ln x$.*

1) a) *Les fonctions $u: x \longmapsto x$ et $v: x \longmapsto -2\ln x$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc la fonction $f=u+v$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a $(\forall x \in\,]0,+\infty[)\,, g'(x) = 1-2\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-2}{x}$.*

b) *Le signe de $g'(x)$ sur $]0,+\infty[$ est celui de $x-2$, (car $(\forall x \in\,]0,+\infty[)\,,\ x>0$), donc*

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

Ce qui signifie que la fonction g est décroissante sur $]0,2]$ et croissante sur $[2,+\infty[$.

2) a) *Déduisons que : $(\forall x \in\,]0,+\infty[) : g(x)\geq 0$.*

La fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0,2]$, alors $g(x)\geq g(2)$ c'est-à-dire $g(x)\geq 2-\ln 4$ donc $g(x)>0$. De même la fonction g est croissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$, alors $g(x)\geq g(2)$ c'est-à-dire $g(x)>0$. Donc $(\forall x \in\,]0,+\infty[) : g(x)\geq 0$.

b) *Montrons que : $(\forall x \in\,]0,+\infty[) : \dfrac{\ln x^2}{x}<1$.*

On a

$$\frac{\ln x^2}{x}<1 \iff \ln x^2 < x \iff -2\ln x > -x \iff x-2\ln x>0 \iff g(x)>0$$

et comme $(\forall x \in\,]0,+\infty[)\,, g(x)>0$, donc $(\forall x \in\,]0,+\infty[) : \dfrac{\ln x^2}{x}<1$.

Partie 02 *On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x-(\ln x)^2$.*

1) a) *Calculons : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$:*

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}(\ln x)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x=0$ donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=-\infty$
La courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

b) *Montrons que :* $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

Soit $x \in \left]0, +\infty\right[$, *on a*

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(\ln(\sqrt{x})^2)^2}{\sqrt{x}^2} = \frac{(2\ln\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}^2} = \frac{4(\ln\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}^2} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

- *Déduire que :* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

c) *Déduisons les limites :* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

On a: $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x-(\ln x)^2 = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x\left(1 - \dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)$ *et comme* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x\left(1 - \dfrac{(\ln x)^2}{x}\right) = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$.

et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x-(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} 1 - \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 1$

d) *Calculons :* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} (f(x) - x)$:

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x - (\ln x)^2 - x = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} -(\ln x)^2 = -\infty$.

La courbe (C_f) *admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation :* $y = x$ *au voisinage de* $+\infty$.

e) *La position relative de la courbe* (C_f) *et la droite* (Δ) *d'équation :* $y = x$ *sur l'intervalle* $\left]0, +\infty\right[$

Soit $x \in \left]0, +\infty\right[$, *on a*

$$f(x) - x = x - (\ln x)^2 - x = -(\ln x)^2$$

et comme $(\forall x \in \left]0, +\infty\right[)\,, -(\ln x)^2 \leq 0$ *donc*

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$		$-$	0	$-$	

- *La courbe* (C_f) *et au-dessous de la droite* (Δ) : $y = x$ *sur les deux intervalles* $\left]0, 1\right[$ *et* $\left]1, +\infty\right[$.
- $(C_f) \cap (\Delta) = \{A(1, 1)\}$

2) a) *La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a* $(\forall x \in]0,+\infty[)\ ,\ f'(x) = 1 - 2\ln' x . \ln x = \dfrac{x - 2\ln x}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$

et comme $(\forall x \in]0,+\infty[)\ ,\ g(x) > 0$ *donc* $(\forall x \in]0,+\infty[)\ ,\ f'(x) > 0$ *d'où la fonction f est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$.

b) *Le tableau de variations de la fonction f sur* $]0,+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) *Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans* $]0,+\infty[$:

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. De plus $f(]0,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x), \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$, *et Comme* $0 \in \mathbb{R}$, *on déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0,+\infty[$. Autrement dit :*

$$\exists! \alpha \in]0,+\infty[/\quad f(\alpha) = 0$$

- *Vérifions que :* $\dfrac{1}{e} < \alpha < \dfrac{1}{2}$:

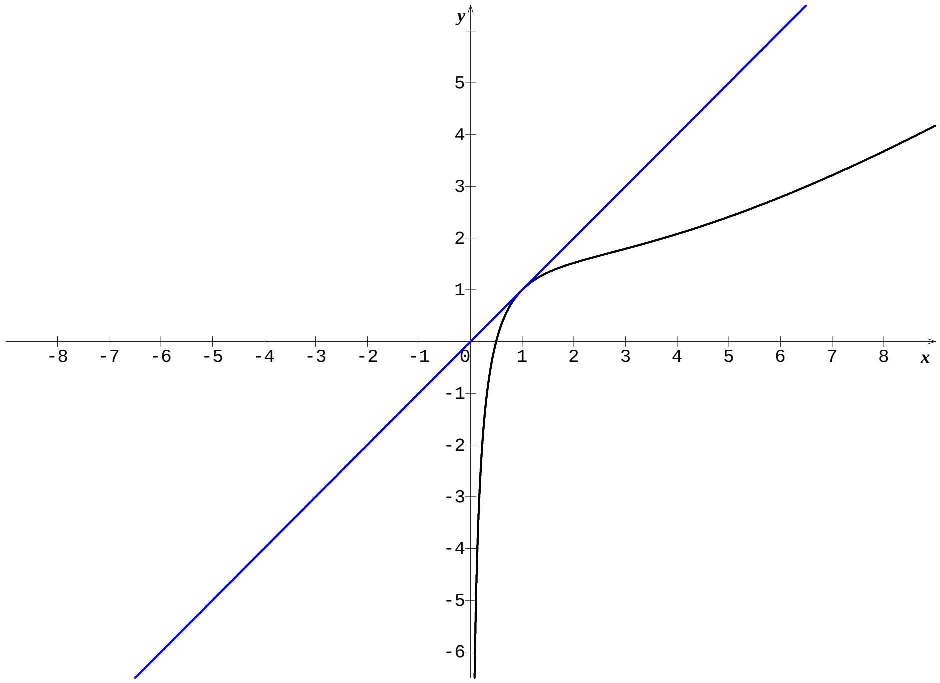
La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$, alors elle est continue sur $\left[\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{2}\right]$, *et on a :* $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \left(\dfrac{1}{e} - \left(\ln\dfrac{1}{e}\right)^2\right) = \dfrac{1}{e} - 1$ *et* $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2} - \left(\ln\dfrac{1}{2}\right)^2\right) = \dfrac{1}{2} - \ln^2 2$ *d'où :* $f\left(\dfrac{1}{e}\right) \times f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$. *Donc, d'après le T.V.I on a :* $\dfrac{1}{e} < \alpha < \dfrac{1}{2}$

4) *Le signe de la fonction f sur l'intervalle* $]0,+\infty[$:

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0,\alpha]$, alors $f(x) \leq f(\alpha)$ c'est-à-dire $f(x) \leq 0$. De même la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$, alors : $f(x) \geq f(\alpha)$ c'est-à-dire $f(x) \geq 0$.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

5) *La courbe représentative de la fonction f et la droite (Δ) dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*



6) *La fonction h est continue sur* $]0,+\infty[$

On a: $h(x) = \dfrac{1}{x} \times \ln x + x^2 = \ln' x \times \ln x + x^2$. *Les fonctions H définies sur* $]0,+\infty[$ *par :* $H(x) = \dfrac{\ln^2 x}{2} + \dfrac{x^3}{3} + k, \;\; k \in \mathbb{R}$ *sont les primitives de h sur* $]0,+\infty[$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**