NOMBRES COMPLEXES

Introduction

Depuis la première année de l'enseignement secondaire qualifiant, nous avons décrit les ensembles de nombres suivants :

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ l'ensemble des nombres naturels,
2. $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ l'ensemble des nombres entiers,
3. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ / \ p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \right\}$ l'ensemble des nombres rationnels,
4. $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Cet ensemble est constitué des nombres rationnels et nombres irrationnels.

   Nous avons alors remarqué que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Dans $\mathbb{N}$, l'opposé d'un nombre n'existe pas ou, de manière équivalente, l'équation $x+1=0$ n'a pas de solution. Par contre, dans $\mathbb{Z}$, cette équation admet une solution : -1. $\mathbb{Z}$ est une extension de $\mathbb{N}$.

Dans $\mathbb{Z}$, l'inverse d'un nombre différent de 1 n'existe pas ou, de manière équivalente, l'équation $2x = 1$ n'a pas de solution. Par contre, dans $\mathbb{Q}$, une solution existe : $\frac{1}{2}$. $\mathbb{Q}$ est une extension de $\mathbb{Z}$.

Dans $\mathbb{Q}$, il n'existe pas de nombre ayant pour carré 2 ou, de manière équivalente, la diagonale d'un carré de côté 1 n'est pas mesurable ou l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution. Par contre dans $\mathbb{R}$, cette équation admet 2 solutions : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$.

Dans $\mathbb{R}$, il n'existe pas de nombre ayant pour carré -1 ou, de manière équivalente, l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution.

Plus généralement, l'équation $x^2 + a = 0$, avec a un nombre réel positif $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car il n'existe pas de nombre réel ayant un carré négatif : $x^2 = -a$.

Si on "résolvait" tout de même cette équation, on trouverait : $x = \pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a \times (-1)} = \pm \underbrace{\sqrt{a}}_{\in \mathbb{R}} \times \sqrt{-1}$

Le problème se ramène à la non-connaissance de $\sqrt{-1}$. Si l'on connaissait la valeur de $\sqrt{-1}$, toutes les équations de la forme $x^2 + a = 0$ (avec $a \in \mathbb{R}$) pourraient alors être résolues. Par contre, la valeur de $\sqrt{-1}$ ne serait évidemment pas un nombre réel. Ainsi, l'objectif de ce cours est de définir un ensemble de nombres tel que les racines de nombres négatifs soient définies. Nous noterons ce nouvel ensemble $\mathbb{C}$ et nous appellerons ces nouveaux nombres **nombres complexes**. Dans cet ensemble, nous allons introduire un nouveau symbole qui représentera $\sqrt{-1}$: $i = \sqrt{-1}$.

L'ensemble des nombres complexes

Définition et Vocabulaire

Définition 1 .

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, *contenant l'ensemble* $\mathbb{R}$, *tel que :*

- *L'ensemble* $\mathbb{C}$ *posséde un nombre noté* i *tel que :* $i^2 = -1$.
- *L'ensemble* $\mathbb{C}$ *est l'ensemble des nombres* z *de la forme :*

$$z = a + ib$$

- *Le nombre réel* a *s'appelle la partie réelle de* z *notée :* $\mathrm{Re}(z)$.

- *Le nombre réel* b *s'appelle la partie imaginaire de* z *notée :* $\mathrm{Im}(z)$.

Cette forme $z = a + ib$ *est appelée* ***forme algébrique.***

Vocabulaire 2 .

♣ Si $\mathrm{Im}(z) = 0$ *le nombre complexe* z *est réel.*

♣ Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ *le nombre complexe est dit imaginaire pur.*

Remarque 3 .

L'ensemble des réels est $\mathbb{R}$. *L'ensemble des imaginaires purs, c'est-à-dire l'ensemble des* iy *où* y *décrit* $\mathbb{R}$, *se note* $i\mathbb{R}$.

Exemple 4 .

$\mathrm{Re}\,(1 + 2i) = 1$ *et* $\mathrm{Im}\,(1 + 2i) = 2$.

Égalité de deux nombres complexes sous forme algébrique

Propriété 5 .

On considère les nombres complexes $z = a + ib$ *et* $z' = a' + ib'$.

$$z = z' \iff \begin{cases} a = a' \\ \\ b = b' \end{cases}$$

Remarque 6 .

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, *il n'y a plus la notion d'ordre usuelle*

(*On ne pourra pas comparer un nombre complexe à un autre ou dire s'il est positif ou négatif etc ...*)

Les opérations sur les nombres complexes

Propriété 7 .
On considère les nombres complexes $z = a + ib$ *et* $z' = a' + ib'$.

- ***La somme*** : $z + z'$ *est définie par :*

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

- ***Le produit*** : $z \times z'$ *est définie par :*

$$z.z' = (a + ib).(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Exemple 8 .
$(1 + 2i)(5 - 3i) = 5 - 3i + 10i - 6i^2 = 11 + 7i \quad , \qquad (4 - 3i)^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$
$4 + 7i - (2 + 4i) = 2 + 3i$

Propriété 9 (*Inverse d'un nombre complexe*)
Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ *(avec* a *et* b *deux réels non nuls tout les deux) admet un inverse pour la multiplication, noté* $\frac{1}{z}$ *dont la forme algébrique est :* $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$.

Démonstration 10 .
Soient a *et* b *deux réels tels que* $(a, b) \neq (0, 0)$ *puis* $z = a + ib$. *Cherchons* $z' = a + ib'$ *tel que* $z \times z' = 1$. *On a*

$$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i\,(ba' + ab')$$

donc

$$\begin{aligned} z \times z' = 1 &\iff (aa' - bb') + i\,(ba' + ab') = 1 \\ &\iff \begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ \\ ba' + ab' = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} \\ \\ b' = \dfrac{-b}{a^2 + b^2} \end{cases} \qquad (z' \text{ est unique}) \end{aligned}$$

Exemple 11 .
$\frac{1}{2 + 3i} = \frac{2 - 3i}{2^2 + 3^2} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

Représentation graphique des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Définition 12 .
À tout nombre complexe $z = a + ib$, *on peut faire correspondre un point* $M(a, b)$ *dans un plan orthonormal* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

♣ *Le point* $M(a, b)$ *s'appelle l'image du nombre complexe* $z = a + ib$.

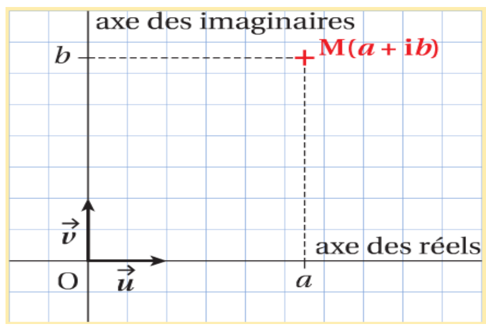
♣ *Le nombre complexe* $z = a+ib$ *s'appelle l'affixe du point* $M(a, b)$. (*on note souvent* $z = aff(M)$).

♣ *L'axe des abscisses est dénommé axe des réels*

(*puisqu'il ne contient que les points dont les affixes sont des réels*).

♣ *L'axe des ordonnées est dénommé axe des imaginaires purs*

(*puisqu'il ne contient que les points dont les affixes sont des imaginaires purs*).



Propriété 13 .

♣ *Soient A et B deux points du plan. Le milieu I du segment* $[AB]$ *a pour affixe* $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

♣ *Soient A et B deux points du plan. Le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *a pour affixe* $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Démonstration 14 .
Soient A et B deux points du plan de coordonnées respectives (x_A, y_A) *et* (x_B, y_B).

♣ *On sait que I a pour coordonnées* $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$, *donc* $z_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} + i\dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{1}{2}\left((x_A + iy_A) + (x_B + iy_B)\right) = \dfrac{1}{2}(z_A + z_B)$.

♣ *On sait que* $\overrightarrow{AB}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, *donc* $z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$.

Exemple 15 .
Soient $A(2, -1)$ *et* $B(-1, 3)$. *Donc* $z_A = 2 - i$ *et* $z_B = -1 + 3i$, *d'où* $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (-1 + 3i) - (2 - i) = -3 + 4i$.

Conjugué d'un nombre complexe

Définition 16 .

Soit z un nombre complexe dont la forme algébrique est $z = a + ib$. On appelle le nombre conjugué de z, le nombre complexe noté $\overline{z}$ tel que :

$$\overline{z} = a - ib$$

Exemple 17 .

$\left(\overline{2-3i}\right) = 2 + 3i \quad , \quad \left(\overline{1+5i}\right) = 1 - 5i.$

Exemple 18 .

Trouver la forme algébrique du complexe suivant : $z = \dfrac{2-i}{3+2i}$.

On multiplie la fraction en haut et en bas par le complexe conjugué du dénominateur :

$$z = \frac{(2-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6-4i-3i+2i^2}{9-(2i)^2} = \frac{4-7i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$$

Exemple 19 .

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E) : z = (2-i)z + 3$

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Longleftrightarrow \quad z - (2-i)z = 3 \\
&\Longleftrightarrow \quad z(1-2+i) = 3 \\
&\Longleftrightarrow \quad z = \frac{3}{-1+i} \\
&\Longleftrightarrow \quad z = \frac{-3}{1-i} \\
&\Longleftrightarrow \quad z = \frac{-3(1+i)}{1-(i^2)} = \frac{-3}{2} - \frac{3}{2}i
\end{aligned}$$

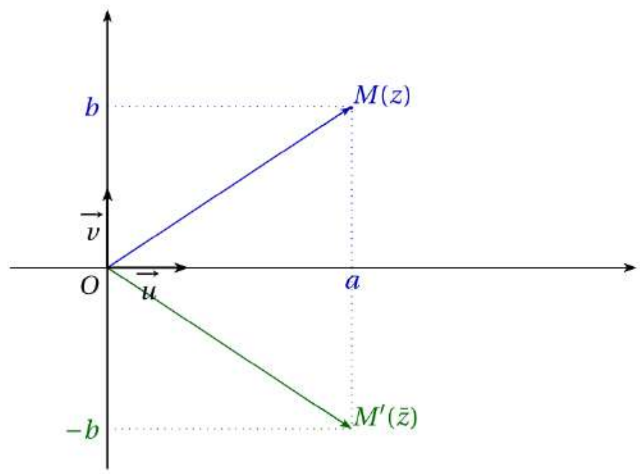
Donc

$$S = \left\{ \frac{-3}{2} - \frac{3}{2}i \right\}$$

Remarque 20 .

♣ *Il est clair que le conjugué de $\overline{z}$ est z. On dit alors que z et $\overline{z}$ sont deux nombres complexes conjuguées.*

♣ $\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(\overline{z})$ *et* $\mathrm{Im}\,(z) = -\,\mathrm{Im}\,(\overline{z})$. *Les points M et M' d'affixes respectives z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.*



Propriété 21 .

Soit z un nombre complexe. Alors

$$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z) \quad ; \qquad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,(z)\,.$$

En particulier, $(z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z})$ *et* $(z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z})$.

Démonstration 22 .

Notons $z = a + ib$ avec a et b deux réels. Alors, $z + \overline{z} = 2a$ et $z - \overline{z} = 2ib$. En particulier

$$z = \overline{z} \iff b = 0 \iff z \in \mathbb{R} \quad et \quad z = -\overline{z} \iff a = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$$

Propriété 23 .

Pour tous complexes z et z', on a :

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
3. $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}\ ,\quad z \in \mathbb{C}^*.$
4. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}},\ z' \in \mathbb{C}^*.$
5. $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n \quad , \quad (n \in \mathbb{N})$

Démonstration 24 .

1. *Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, posons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b, a' et b' sont des réels, on a*

$$\begin{aligned}
\overline{z + z'} &= \overline{a + ib + a' + ib'} \\
&= \overline{a + a' + i\,(b + b')} \\
&= (a + a') - i\,(b + b') \\
&= (a - ib) + (a' - ib') \\
&= \overline{z} + \overline{z'}
\end{aligned}$$

2. *Soit* $(z,z')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$, *posons* $z=a+ib$ *et* $z'=a'+ib'$ *où* a,b,a' *et* b' *sont des réels, on a*

$$\begin{aligned}\overline{z\times z'} &= \overline{(a+ib)\times(a'+ib')}\\ &= \overline{(aa'-bb')+i(ab'+a'b)}\\ &= (aa'-bb')-i(ab'+a'b)\\ &= (a-ib)\times(a'-ib')\\ &= \overline{z}\times\overline{z'}\end{aligned}$$

3. *Soit* $z\in\mathbb{C}^*$, *on a* : $\overline{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\overline{z\times\frac{1}{z}}=\overline{1}=1$. *Ceci montre que* $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$.

4. *Soit* $(z,z')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$, *on a* $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\overline{\left(z\times\frac{1}{z'}\right)}=\overline{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\overline{z}\times\frac{1}{\overline{z'}}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

5. *Soit* $z\in\mathbb{C}$. *Montrons par récurrence que :* $(\forall n\in\mathbb{N})\,,\ \overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$

   ♣ *Le résultat est vrai pour* $n=0$.

   ♣ *Soit* $n\geq 0$. *Supposons que* $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$, *alors*

   $$\overline{(z^{n+1})}=\overline{z^n\times z}=\overline{z^n}\times\overline{z}=(\overline{z})^n\times\overline{z}=\overline{z}^{n+1}.$$

   Le résultat est démontré par récurrence.

Exemple 25 .

Donner la forme algébrique du conjugué $\overline{z}$ *du complexe suivant :* $z=\dfrac{3-i}{1+i}$.

On a

$$\begin{aligned}\overline{z} &= \overline{\frac{3-i}{1+i}}\\ &= \frac{\overline{3-i}}{\overline{1+i}}\\ &= \frac{3+i}{1-i}\\ &= \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\\ &= \frac{3+3i+i-1}{2}\\ &= 1+2i\end{aligned}$$

Exemple 26 *On a* $\overline{\left(\dfrac{(1-i)\,z^2+3i}{(z-3+i)^2}\right)}=\dfrac{\overline{(1-i)\,z^2+3i}}{\overline{(z-3+i)^2}}=\dfrac{\overline{(1-i)\,z^2}-3i}{\left(\overline{z-3+i}\right)^2}=\dfrac{(1+i)\,\overline{z}^2-3i}{(\overline{z}-3-i)^2}$.

Exercice 27 .

Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes suivants : $z_1=\dfrac{3+2i}{2-3i}$, $z_2=\left(\dfrac{1+2i}{1-i}\right)^2$, $z_3=\dfrac{1+2i}{1-i}-\dfrac{1-2i}{1+i}$.

♣ $z_1 = \dfrac{3+2i}{2-3i} = \dfrac{(3+2i)\left(\overline{2-3i}\right)}{(2-3i)\left(\overline{2-3i}\right)} = \dfrac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{6+9i+4i-6}{2^2+3^2} = \dfrac{15+13i}{13} = \dfrac{15}{13}+i.$

♣ $z_2 = \left(\dfrac{1+2i}{1-i}\right)^2 = \left(\dfrac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^2 = \left(\dfrac{-1+3i}{2}\right)^2 = \dfrac{1-6i-9}{4} = \dfrac{-8-6i}{4} = -2-\dfrac{3}{2}i.$

♣ $z_3 = \dfrac{1+2i}{1-i} - \dfrac{1-2i}{1+i} = \dfrac{(1+2i)(1+i)-(1-2i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+i+2i-2-1+i+2i+2}{1+1} = \dfrac{6i}{2} = 3i$

Module et Argument d'un nombre complexe

Module d'un nombre complexe

Définition 28 .

Pour tout nombre complexe $z = a+ib$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, *le module de* z *est le nombre réel positif noté* $|z|$ *défini par :* $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Exemple 29 .

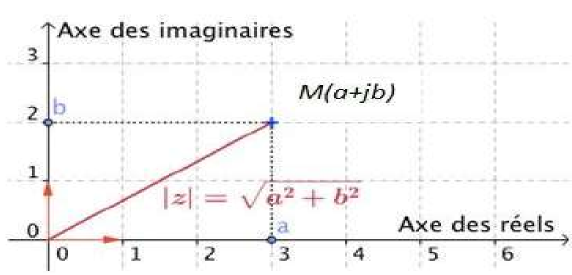
Déterminer le module des nombres complexes suivants : $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 1-\sqrt{3}i$ *et* $z_3 = 3-2i$.

$|z_1| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, $|z_2| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ *et* $|z_3| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$.

Interprétation géométrique

Le module d'un nombre complexe s'interprète bien sûr géométriquement. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Si M est un point du plan d'affixe z_M, alors immédiatement, $|z_M| = OM$. Plus généralement, si A et B sont deux points du plan,

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = |(x_B-x_A)+i(y_B-y_A)| = |z_B-z_A|$$



Propriété 30 .

1. $(\forall z \in \mathbb{C})\,, \quad z \times \overline{z} = |z|^2$

2. $(\forall z \in \mathbb{C})\,, \, |z| = 0 \iff z = 0.$

Démonstration 31 .

1. *Soit* $z \in \mathbb{C}$, *on a* $z \times \overline{z} = (\mathrm{Re}\,(z) + i\,\mathrm{Im}\,(z)) \times (\mathrm{Re}\,(z) - i\,\mathrm{Im}\,(z)) = (\mathrm{Re}\,(z))^2 - i^2\,(\mathrm{Im}\,(z))^2 = (\mathrm{Re}\,(z))^2 + (\mathrm{Im}\,(z))^2 = |z|^2\,.$

2. *En particulier* $|z| = 0 \iff z \times \overline{z} = 0 \iff z = 0$ *ou* $\overline{z} = 0 \iff z = 0.$

Propriété 32 .

1. $\forall\,(z, z') \in \mathbb{C}^2,\ |z \times z| = |z| \times |z'|$

2. $(\forall z \in \mathbb{C}^*)(\forall n \in \mathbb{Z}),\ |z^n| = |z|^n$

3. $(\forall z \in \mathbb{C}^*)\,, \left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

4. $\forall\,(z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*,\ \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

5. $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = |\overline{z}| = |-z|$

Exemple 33 .

Calculer les modules des nombres complexes suivants : $z_1 = 4i\,(-2+3i)$, $z_2 = \dfrac{7}{1+2i}$ *et* $z_3 = \dfrac{(2+i)\,(3-2i)^2}{4+3i}$

♣ $|z_1| = |4i(-2+3i)| = |4i|\,|-2+3i| = \sqrt{16}.\sqrt{2^2+3^2} = 4.\sqrt{13}$

♣ $|z_2| = \left|\dfrac{7}{1+2i}\right| = \dfrac{\sqrt{7^2}}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{7}{\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}$

♣ $|z_3| = \left|\dfrac{(2+i)\,(3-2i)^2}{4+3i}\right| = \dfrac{|2+i|\,|3-2i|^2}{|4+3i|} = \dfrac{\sqrt{5} \times 13}{\sqrt{25}} = \dfrac{13\sqrt{5}}{5}.$

Remarque 34 .

♣ $\forall\,(z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \ |\mathrm{Re}\,(z)| \le |z|$, $|\mathrm{Im}\,(z)| \le |z|\,.$

♣ $\forall\,(z, z') \in \mathbb{C}^2,\ |z + z'| \le |z| + |z'|\,.$

Exercice 35 .

Soit z un nombre complexe différent de 1, M le point d'affixe z et $z' = \dfrac{z+i}{z-1}$. Déterminer F l'ensemble des points M tels que : $|z'| = 1$.

Cherchons F l'ensemble des points $M\,(z = x+iy)$ tels que : $\left|\dfrac{z+i}{z-1}\right| = 1$.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z+i}{z-1}\right| &= 1 \\
&\Longleftrightarrow \frac{|z+i|}{|z-1|} = 1 \\
&\Longleftrightarrow |z+i| = |z-1| \\
&\Longleftrightarrow |z+i|^2 = |z-1|^2 \\
&\Longleftrightarrow (z+i)(\overline{z}-i) = (z-1)(\overline{z}-1) \\
&\Longleftrightarrow z \times \overline{z} - iz + i\overline{z} + 1 = z \times \overline{z} - z - \overline{z} + 1 \\
&\Longleftrightarrow -i(z-\overline{z}) = -(z+\overline{z}) \\
&\Longleftrightarrow -i2i\,\mathrm{Im}(z) = -2\,\mathrm{Re}(z) \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Re}(z) \\
&\Longleftrightarrow y = -x \\
&\Longleftrightarrow x + y = 0
\end{aligned}$$

Donc, F est la droite d'équation $x+y=0$.

Exercice 36 .

Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que : $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.
Soit $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, on a

$$\begin{aligned}
|z+z'|^2 + |z-z'|^2 &= (z+z')\left(\overline{z+z'}\right) + (z-z')\left(\overline{z-z'}\right) \\
&= (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) + (z-z')\left(\overline{z}-\overline{z'}\right) \\
&= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z} - z\overline{z'} - z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\
&= 2\left(z\overline{z} + z'\overline{z'}\right) \\
&= 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)
\end{aligned}$$

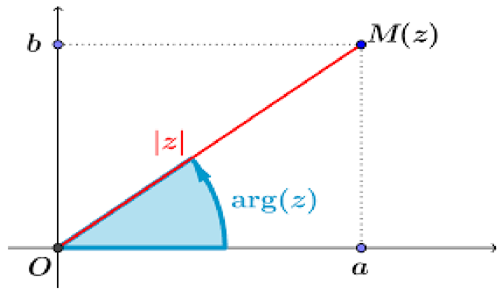
Argument d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Définition 37 .

Soit z un nombre complexe non nul d'image M dans le plan. On appelle ***argument*** *de z, noté $\arg(z)$ tout nombre réel θ mesure en radian de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}}\right)$, on écrit :*

$\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$.



Un nombre complexe possède une infinité d'arguments. Si θ est un argument de z, tout autre argument de z est de la forme $\theta + 2k\pi \quad, (k \in \mathbb{Z})$. L'unique argument θ appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ s'appelle **l'argument principal**. Le nombre complexe nul $z = 0$ ne possède pas d'arguments car, dans ce cas, l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}}\right)$ ne se défini pas.

Propriété 38 .

Soit z un nombre complexe non nul.

1. $(\forall z \in \mathbb{R}^*)$, $\arg(z) \equiv 0\,[\pi]$
2. $(\forall z \in i\mathbb{R}^*)$, $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$

Exemple 39 .

$$\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \quad , \quad \arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi] \quad , \quad \arg(1) \equiv 0\,[2\pi] \quad \textit{et} \quad \arg(-1) \equiv \pi\,[2\pi]$$

Forme Trigonométrique, Forme Exponentielle d'un nombre complexe

Forme Trigonométrique

Définition 40 .

*Tout nombre complexe z non nul d'argument θ peut s'écrire sous la forme $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ appelé **forme trigonométrique** de z et on a* $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \\ \\ \sin(\theta) = \dfrac{\operatorname{Im}(\theta)}{|z|} \end{cases}$.

Exemple 41 .

Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes : $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2+2\sqrt{3}i$, $z_3 = \sqrt{3} - i$ *et* $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$

♣ *On a :* $|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, *donc*

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Autre méthode.
on a $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. *Nous devons maintenant résoudre le système suivant :* $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, *donc* $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$. *D'où une forme trigonométrique de z est :* $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

♣ *On a :* $|z_2| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$, *donc*

$$\begin{aligned} z_2 &= 4\left(\frac{2}{4} + i\frac{2\sqrt{3}}{4}\right) \\ &= 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

♣ *On a :* $|z_3| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$, *donc*

$$\begin{aligned} z_3 &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) \end{aligned}$$

♣ *On a :* $|z_4| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, *donc* $z_4 = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Propriété 42 *.*
Pour tout nombre complexe non nul, on a :

$$\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\,[2\pi] \quad , \qquad \arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\,[2\pi] \quad , \qquad \arg(-\overline{z}) \equiv \pi - \arg(z)\,[2\pi].$$

Propriété 43 .

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, on a :

1. $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$
2. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$
3. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi]$
4. $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\,[2\pi]$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration 44 .

1. Si z *et* z' *ont pour arguments respectifs* θ *et* θ' *leurs forme trigonométrique est :* $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ *avec* $r \in \mathbb{R}_+$ *et* $z' = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$ *avec* $r' \in \mathbb{R}_+$.

   On a
   $$z \times z' = r \times r'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$$
   et comme $r \times r' \in \mathbb{R}_+$, *on donc* $\arg(z \times z') \equiv \theta + \theta'\,[2\pi]$. *D'où* $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$.

2. *On a* : $\arg(1) \equiv 0\,[2\pi]$ *et comme* $1 = z \times \dfrac{1}{z}$ *et* : $\arg\left(z \times \dfrac{1}{z}\right) \equiv \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z}\right)[2\pi]$ *donc* $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$.

3. *On a*
   $$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi] \end{aligned}$$

4. *Le résultat est déduit sur* $\mathbb{N}$ *de* (1) *par une simple récurrence sur* n, *et il est prolongé à* $\mathbb{Z}$ *en utilisant* (2) .

Remarque 45 .

On notera l'analogie entre ces relations et les propriétés de la fonction logarithme.

Exemple 46 .

Soit $z_1 = 2 + 2i$ *et* $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. *Écrire* z_1 *et* z_2 *sous la forme trigonométrique.*
En déduire les formes trigonométriques de : $z_1 \times z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $(z_1)^3$

♣ $z_1 = 2+2i$, *on a* $|z_1| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, *donc* $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

On a : $|z_2| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, *donc* $z_4 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

♣ *On a :* $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$,

et

$$\begin{aligned} \arg(z_1 \times z_2) &\equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{7\pi}{12}\,[2\pi] \end{aligned}$$

donc : $z_1 \times z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$.

On a : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$,

et

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &\equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{-\pi}{12}\,[2\pi] \end{aligned}$$

donc : $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)$.

On a : $|z_1|^3 = \left(2\sqrt{2}\right)^3 = 16\sqrt{2}$ *et* $\arg(z_1^3) \equiv \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$, *d'où* $(z_1)^3 = 16\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Exercice 47 .

Soient $u = 1+i$ *et* $v = -1+i\sqrt{3}$.

1. *Déterminer les modules de* u *et* v.
2. *Donner un argument de* u *et un argument de* v.
3. *Déterminer le modules et un argument des nombres complexes* $\overline{u}$, uv, v^3 *et* $\frac{u}{v}$.
4. *En déduire les valeurs de* $\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right)$.

♣ *On a :* $|u| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $|v| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

♣ *Soit* θ *un argument de* u, *on a* $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ *donc* $\arg(u) \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$. *Soit* θ' *un argument de* v, *on a* $\begin{cases} \cos(\theta') = \dfrac{-1}{2} \\ \sin(\theta') = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ *donc* $\arg(v) \equiv \dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi]$.

♣ *On a :* $|\overline{u}| = |u| = \sqrt{2}$, $|uv| = |u|\,|v| = 2\sqrt{2}$, $|v^3| = |v|^3 = 2^3 = 8$, $\left|\dfrac{u}{v}\right| = \dfrac{|u|}{|v|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On a : $\arg(\overline{u}) \equiv -\arg(u)\,[2\pi]$ *alors* $\arg(\overline{u}) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$. *De plus :* $\arg(u \times v) \equiv \arg(u) + \arg(v)\,[2\pi]$ *d'où* $\arg(u \times v) \equiv \dfrac{11\pi}{12}\,[2\pi]$. *On a* $\arg(v^3) \equiv 3\arg(v)\,[2\pi]$ *c'est-à-dire* $\arg(v^3) \equiv 2\pi\,[2\pi]$ *et comme* $2\pi \equiv 0\,[2\pi]$ *donc* $\arg(v^3) \equiv 0\,[2\pi]$. *On a* $\arg\left(\dfrac{u}{v}\right) \equiv \arg(u) - \arg(v)\,[2\pi]$ *par suite* $\arg\left(\dfrac{u}{v}\right) \equiv \dfrac{-5\pi}{12}\,[2\pi]$.

♣ *On a :*

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &= \frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}} \\ &= \frac{(1+i)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{-1-i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{1+3} \\ &= \frac{-1+\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}+1}{4}. \end{aligned}$$

donc $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right) \equiv \dfrac{\frac{-1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \sin\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right) = \dfrac{\frac{-\sqrt{3}-1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases}$ *d'où* $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$.

Forme Exponentielle

Définition 48 .

Pour tout réel θ,

$$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$$

*Un nombre complexe de module r et d'argument θ sera écrit alors $re^{i\theta}$. Cette écriture est appelée une **forme exponentielle de** z.*

Exemple 49 .

Déterminer une forme exponentielle des nombres complexes : $z_1 = 3+3i$, $z_2 = 1+i\sqrt{3}$ *et* $z_3 = -3-3i$

♣ *On a :* $|z_1| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, *donc*

$$\begin{aligned} z_1 &= 3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}} + i\frac{3}{3\sqrt{2}}\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

♣ *On a :* $|z_2| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$, *donc*

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{3}} \end{aligned}$$

♣ *On a :* $|z_3| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$, *donc*

$$\begin{aligned} z_3 &= 3\sqrt{2}\left(\frac{-3}{3\sqrt{2}} - i\frac{3}{3\sqrt{2}}\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \\ &= 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} \end{aligned}$$

Propriété 50 .

Pour tout θ et θ' de $\mathbb{R}$, on a

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \ , \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \quad , \quad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i(n\theta)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Formule de Moivre

Propriété 51 .

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Démonstration 52 .

On a $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Exemple 53 .

Trouver la forme algébrique de : $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5$.

Déterminons la forme trigonométrique de $z = 1 - i\sqrt{3}$, *on a :* $|z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$ *donc*

$$z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5 &= \left(2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)\right)^5 \\
&= 32\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{3}\right)\right) \\
&= 32\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad / \quad \frac{-5\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\
&= 32\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 16 + 16\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

Exemple 54 .

Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}+i\right)^3}$:

On a : $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ *et* $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ *alors*

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{4}\right)\right) = -4 \quad , \left(\sqrt{3}+i\right)^3 = 2^3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)\right) = 8i$$

donc

$$\frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}+i\right)^3} = \frac{-4}{8i} = \frac{1}{2}i$$

Formule d'Euler

Propriété 55 .

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration 56 .

On a : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ *et* $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$. *D'où la formule d'Euler.*

Linéarisation de $\cos^m(\theta)$ et $\sin^m(\theta)$

Linéariser $\cos^m(\theta)$ et $\sin^m(\theta)$ c'est les exprimer comme combinaisons linéaires de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$. Cette opération est très utile en particulier pour trouver des primitives.

♣ La Linéarisation de $\cos^2(\theta)$:

On a

$$\begin{aligned}
\cos^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} + 2e^{i\theta} \times e^{-i\theta}}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i2\theta} + e^{-2\theta}}{2}\right) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

♣ La Linéarisation de $\sin^3(\theta)$:

On a

$$\begin{aligned}
\sin^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\
&= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 \times \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) \\
&= \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} - 2e^{i\theta} \times e^{-i\theta}}{-4} \times \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\
&= \frac{\left(e^{i\theta}\right)^3 - 3\left(e^{i\theta}\right)^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^2 - \left(e^{-i\theta}\right)^3}{8i} \\
&= \frac{\left(e^{i\theta}\right)^3 - \left(e^{-i\theta}\right)^3 - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta}}{8i} \\
&= \frac{e^{i3\theta} - e^{-3i\theta} - 3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)}{8i} \\
&= \frac{-1}{4}\left(\frac{e^{i3\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) \\
&= \frac{-1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta)
\end{aligned}$$

Exemple 57 .

Donner la linéarisation de : $\sin^2(\theta)$ *et* $\cos^3(\theta)$.

Exemple 58 .

Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. *Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes :* $z = 1 + e^{i\theta}$ *et* $z' = e^{i\theta} + e^{i2\theta}$.

On a : $z = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$.

Comme $\theta \in]-\pi, \pi[$ *alors* $\frac{\theta}{2} \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *et par conséquent* $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$.

On a : $z' = e^{i\theta} + e^{i2\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{3i\theta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$.

Résolution dans $\mathbb{C}$ d'équation du second degré à coefficients réels

L'équation de la forme : $z^2 = a \quad (a \in \mathbb{R})$

Propriété 59 .

Soit (E) *l'équation* $z^2 = a$, *on a*

- ♣ Si $a > 0$ *alors l'équation* (E) *admet deux solutions réels :* $\sqrt{a}$ *et* $-\sqrt{a}$.
- ♣ Si $a < 0$ *alors l'équation* (E) *admet deux solutions complexes :* $i\sqrt{-a}$ *et* $-i\sqrt{-a}$
- ♣ Si $a = 0$ *alors* $z = 0$

L'équation de degré 2 dans $\mathbb{C}$

On se propose de résoudre maintenant l'équation (E) : $az^2 + bz + c = 0$ dans $\mathbb{C}$ avec a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. On peut mettre l'équation (E) sous la forme $a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$.

Considérons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation sera de la forme $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$.

En distinguant les cas suivants le signe de Δ, on obtient :

Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$ et on peut écrire $-\Delta = \left(\sqrt{-\Delta}\right)^2$, donc $\Delta = -\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2 = i^2\left(\sqrt{-\Delta}\right)^2 = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$ d'où

$$
\begin{aligned}
(E) \quad & \Longleftrightarrow \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2}{4a^2}=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \left(z+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \left(z+\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad z+\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=0 \ \text{ ou } \ z+\frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=0 \\
& \Longleftrightarrow \quad z=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad z=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}
\end{aligned}
$$

On en déduit que l'équation (E) a deux solutions complexes conjuguées qui sont : $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

La démonstration fait apparaître la factorisation du trinôme az^2+bz+c sous la forme $az^2+bz+c = a\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)$.

Propriété 60 .

Etant donnés trois réels a, b et c avec $a \neq 0$, considérons l'équation : $(E) : az^2+bz+c=0$, et $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

1. Si $\Delta = 0$, *l'équation (E) admet une solution réelle (double) égale à :* $\dfrac{-b}{2a}$.
2. Si $\Delta \neq 0$, *l'équation (E) admet deux solutions distinctes :*

   a) *réelles si $\Delta > 0$:* $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

   b) *complexes conjuguées si $\Delta < 0$:* $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ *et* $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exemple 61 .

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(E) : z^2-2z+4=0$

On a : $\Delta = b^2-4ac = 4-4\times1\times4 = -12 < 0$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2+i\sqrt{12}}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3} \quad \textit{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = 1-i\sqrt{3}$$

Donc

$$S = \left\{1-i\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3}\right\}$$

Exemple 62 .

Résoudre dans $\mathbb{C}$ *les équations* :

$$(E_1) : z^2 - 2z + 5 = 0 \ , \ (E_2) : z^2 + 3z - 4 = 0 \ , \ (E_3) : 4z^2 - 4z + 1 = 0$$

Nombres Complexes et Géométrie

Dans toute cette section, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Argument d'une différence

Propriété 63 .

Si A *et* B *sont deux points distincts du plan d'affixes respectives* a *et* b *alors* :

$$\left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(b-a)\,[2\pi]$$

Démonstration 64 .

Soit M *un point tel que* : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. *Donc* $z_M = z_B - z_A = b - a$ *et*

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}}\right) [2\pi] \\
&\equiv \arg(z_M)\,[2\pi] \\
&\equiv \arg(b-a)\,[2\pi]
\end{aligned}$$

Angle de deux vecteurs et l'argument du quotient de leurs affixes

Thèorème 65 .

Soient A, B, C *et* D *quatre points du plan d'affixes* : z_A, z_B, z_C *et* z_D.
Si : $A \neq B$ *et* $C \neq D$ *alors*

$$\left(\overrightarrow{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$

Démonstration 66 .

D'après la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}}\right) + \left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{CD}}\right) [2\pi] \\
&\equiv \left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{CD}}\right) - \left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}}\right) [2\pi] \\
&\equiv \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)\,[2\pi] \\
&\equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]
\end{aligned}$$

En particulier, si A, B et C sont trois points tels que $A \neq B$ et $A \neq C$, alors $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$.

A partir de cette formule, on peut obtenir une caractérisation de l'alignement des trois points A, B et C ou de l'orthogonalité des droites.

Parallélisme de deux droites - Orthogonalité de deux droites

Thèorème 67 .

Soient A, B, C et D quatre points ($A \neq B$ et $C \neq D$) d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D alors :

$$(AB) \parallel (CD) \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad (AB) \perp (CD) \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$$

Conséquences 68 .

Soient A, B et C trois points ($A \neq B$) d'affixes : z_A, z_B et z_C :

♣ *Les points A, B et C sont alignés* $\iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$.

♣ *Le triangle ABC est rectangle en A* $\iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

Démonstration 69 .

♣ *On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} \text{Les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} &\iff \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv 0\,[\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\,[\pi] \\ &\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

♣ *On a*

$$(AB) \perp (AC) \iff \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$$

Exemple 70 .

1. *Soient A, B et C trois points d'affixes : $z_A = 6 - i$, $z_B = -6 + 3i$ et $z_C = -18 + 7i$, montrer que A, B et C sont alignés.*

2. *Soient A, B et C trois points d'affixes : $z_A = 1 + i$, $z_B = -1 + 4i$ et $z_C = 4 + 3i$, montrer que : $(AB) \perp (AC)$.*

Cocyclicité des points

Propriété 71 .

Soient A, B, C et D quatre points du plan d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D.

Les points A, B, C et D sont cocycliques (c'est-à-dire appartient au même cercle) si et seulement si : $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \dfrac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$.

Exemple 72 .

Montrons que les points $A(2+4i)$, $B(-1+3i)$, $C(2)$ et $D(3+i)$ sont cocyclicité :

On a

$$\begin{aligned}
\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} &= \frac{3+i-2-4i}{-1+3i-2-4i} \times \frac{-1+3i-2}{3+i-2} \\
&= \frac{1-3i}{-3-i} \times \frac{-3+3i}{1+i} \\
&= \frac{-1+3i}{3+i} \times \frac{(-3+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\
&= \frac{(-1+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} \times \frac{(-3+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\
&= \frac{-3+i+9i+3}{10} \times \frac{-3+3i+3i+3}{2} \\
&= \frac{10i}{10} \times 3i \\
&= i \times 3i \\
&= -3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

donc les points A, B, C et D sont cocyclicité

L'ensemble des points qui vérifiant une équation

Rappels :

1. L'ensemble des points (x, y) du plan tel que : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, $\big($où $a, b \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ $\big)$ est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r.
2. L'ensemble des points M du plan tel que : $MA = R$ (où $A \in (P)$ et $R > 0$), est le cercle de centre A et de rayon R.
3. L'ensemble des points M du plan tel que $MA = MB$, (où $A, B \in (P)$) est la médiatrice du segment $[AB]$.

Exemple 73 .

1. *Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tel que :* $|z - 1 + 2i| = 1$. *Déterminer l'ensemble* (Γ) .
2. *Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tel que :* $|z| = |\overline{z} + 1 + 2i|$. *Déterminer l'ensemble* (Δ) .

Nombres Complexes Et Quelques Transformations Du Plan

Écriture complexe d'une translation

Propriété 74 .

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe a.

*Pour tout point M du plan d'affixe z, son image M' par la translation t de vecteur $\overrightarrow{u}$, a pour affixe : $z' = z + a$, cette écriture est appelé **écriture complexe de la translation** t.*

Démonstration 75 .

Dire que M ' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ signifie que

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \iff z' - z = a \iff z' = z + a$$

Exemple 76 .

Déterminer l'affixe de l'image B du point A d'affixe $z_A = -1 + 2i$ par la translation t de vecteur $\overrightarrow{u}\,(3, -1)$.

On a

$$t_{\overrightarrow{u}}\,(A) = B \iff z_B = z_A + z_{\overrightarrow{u}} \iff z_B = 2 + i$$

Écriture complexe d'une homothétie

Soit Ω un point du plan et soit k un réel non nul. Rappelons qu'une homothétie h de centre Ω et de rapport k est une transformation $h : P \longrightarrow P$ définie par : $M \longmapsto M'$ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. On la note aussi $h_{\Omega,k}$.

Propriété 77 .

Soient Ω un point du plan d'affixe ω et $k \in \mathbb{R}^*$

*Pour tout point M du plan d'affixe z, son image M' par l'homothétie de centre Ω de rapport k, a pour affixe : $z' = k\,(z - \omega) + \omega$, cette écriture est appelé **écriture complexe de l'homothétie** h.*

Démonstration 78 .

Dire que M ' est l'image de M par l'homothétie de centre $\Omega\,(\omega)$ signifie que

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \iff z' - \omega = k\,(z - \omega) \iff z' = k\,(z - \omega) + \omega$$

Exemple 79 .

Déterminer l'affixe z_B de l'image du point A d'affixe $z_A = -i$ par l'homothétie h de centre Ω d'affixe $\omega = -2 - 3i$ et de rapport 5.

On a

$$\begin{aligned}
h\,(A) &= B \\
&\iff z_B = 5\,(z_A + 2 + 3i) - 2 - 3i \\
&\iff z_B = 5\,(-i + 2 + 3i) - 2 - 3i \\
&\iff z_B = 5\,(2 + 2i) - 2 - 3i \\
&\iff z_B = 10 + 10i - 2 - 3i \\
&\iff z_B = 8 + 7i
\end{aligned}$$

Écriture complexe d'une rotation

Soient θ un réel et Ω un point du plan. Rappelons que la rotation r de centre Ω et d'angle θ est la transformation $r : P \longrightarrow P$, qui laisse Ω invariant, et si M est un point du plan distinct de Ω alors $r(M) = M'$ avec $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$ et $\Omega M = \Omega M'$. On la note aussi $r_{\Omega,\theta}$.

Propriété 80 .

Soient Ω un point d'affixe ω et $\theta \in \mathbb{R}$

*Pour tout point M du plan d'affixe z, son image M' par la rotation r de centre Ω d'angle θ, a pour affixe : $z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$, cette écriture est appelé **écriture complexe de la rotation** r.*

Démonstration 81 .

Dire que M' est l'image de M par la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ signifie que :

$$\begin{aligned} r(M) = M' &\iff \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) \equiv \theta\,[2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit alors que: $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$ *par suite :* $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ *d'où* $z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$.

Exemple 82 .

Déterminer l'affixe z_B de l'image du point A, d'affixe $z_A = 1+2i$, par la rotation r d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et de centre le point d'affixe $\omega = -1+i$.

On a

$$\begin{aligned} r(A) &= B \\ &\Longleftrightarrow z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_A-\omega)+\omega \\ &\Longleftrightarrow z_B = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(1+2i+1-i)-1+i \\ &\Longleftrightarrow z_B = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}(2+i)-1+i \\ &\Longleftrightarrow z_B = \frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)(2+i)+2(-1+i)}{2} \\ &\Longleftrightarrow z_B = \left(\frac{-4-\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Cas particuliers

♣ Si $\omega = 0$, alors l'écriture complexe de la rotation devient : $z' = e^{i\theta}z$.

♣ Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors l'écriture complexe de la rotation devient : $z' - \omega = i(z-\omega)$.

♣ Si $\omega = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors l'écriture complexe de la rotation devient : $z' = iz$.

Exercice 83 .

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3+2z^2-16=0$.

1. **a)** *Montrer que 2 est solution de (E) puis que (E) peut s"écrire sous la forme $(z-2)(a^2+bz+c)=0$ où a, b et c sont des réels que l'on déterminera.*
   b) *En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.*
2. *Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère les points A, B et D d'affixes respectives $z_A = -2-2i$, $z_B = 2$ et $z_D = -2+2i$.*
   Calculer l'affixe z_C du point C tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. *Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{-\pi}{2}$, et F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.*
   a) *Calculer les affixes z_E et z_F des points E et F.*
   b) *Vérifier que : $\frac{z_F-z_A}{z_E-z_A} = i$. En déduire la nature du triangle AEF.*

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

www.etude – generale.com