FONCTION LOGARITHME

Fonction logarithme népérien

Définition de la fonction ln

Définition 1 .

La primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *sur* $]0,+\infty[$ *et qui s'annule en* 1 *est appelée la fonction logarithme népérien, et on la note* $\ln$.

Remarque 2 .

♣ *Le domaine de définition de la fonction* $\ln$ *est* $]0,+\infty[$ *et* $\ln(1)=0$.

♣ *La fonction* $\ln$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et de plus* : $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\,,\quad \ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Exemple 3 .

Déterminer D *l'ensemble de définition de la fonction* f *dans chaque cas* :

$f(x)=\ln(x+6)+\ln(x+4)$, $f(x)=\ln\left(x^2-x\right)$, $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-4}{x+1}\right)$ *et* $f(x)=\ln\left(\left|1+\dfrac{1}{x}\right|\right)$

♣ *On a*

$$\begin{aligned} D &= \{x\in\mathbb{R}\ /\ \ x+6>0 \ \ et \ \ x+4>0\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}\ /\ \ x>-6 \ \ et \ \ x>-4\} \\ &= \,]-4,+\infty[\,. \end{aligned}$$

♣ *On a* : $D=\{x\in\mathbb{R}\ /\ \ x^2-x>0\}$, *et comme* $x^2-x>0$ *si et seulement si* $x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[$ *donc*

$$D=\,]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[$$

♣ *On a* : $D=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \ x+1\neq 0 \ \ et \ \ \dfrac{x-4}{x+1}>0\right\}$ *et comme* $\dfrac{x-4}{x+1}>0$ *si et seulement si* $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]4,+\infty[$ *donc*

$$D=\,]-\infty,-1[\,\cup\,]4,+\infty[$$

♣ *On a* : $D=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \ x\neq 0 \ et \ \left|1+\dfrac{1}{x}\right|>0\right\}$

et comme $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $\left|1+\dfrac{1}{x}\right| \geq 0$ *donc*

$$\begin{aligned} D &= \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \ x \neq 0 \ \textit{et} \ 1+\frac{1}{x} \neq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \ x \neq 0 \ \textit{et} \ \frac{x+1}{x} \neq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ \ x \neq 0 \ \textit{et} \ x+1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ \ x \neq 0 \ \textit{et} \ x \neq -1\} \\ &=]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[\end{aligned}$$

Monotonie de la fonction ln

Propriété 4 .

La fonction ln *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$.

Démonstration 5 .

On a $(\forall x \in]0,+\infty[)$, $\ln' x = \dfrac{1}{x} > 0$. *Donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$.

Conséquences 6 .

♣ $\left(\forall (x,y) \in (]0,+\infty[)^2\right)$, $\ln x < \ln y \iff x < y$, $\ln x > \ln y \iff x > y$, $\ln x = \ln y \iff x = y$

♣ $(\forall x \in]0,+\infty[)$, $\ln x = 0 \iff x = 1$, $\ln x > 0 \iff x > 1$ *et* $\ln x < 0 \iff x < 1$.

Démonstration 7 .

Découle de la stricte croissance de la fonction logarithme népérien sur $]0,+\infty[$.

Exemple 8 .

1. *Résoudre les équations suivantes* :

$$(E_1): \ \ln(-2x+1) = 0 \quad , \quad (E_2): \ \ln(-x) + \ln(x+3) = 0$$

2. *Résoudre les inquations suivantes* :

$$(I_1): \ \ln\left(x^2+2x-3\right) \geq 0 \quad , \quad (I_2): \ \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0$$

Solution 9 .

1. *On désigne par* D *l'ensemble de définition de l'équation à résoudre et par* S *son ensemble de solutions.*

♣ *On a* : $D = \{x \in \mathbb{R} \ / \quad -2x+1>0\} = \left\{x \in \mathbb{R}/ \ x < \dfrac{1}{2}\right\} = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$.

Soit $x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$, *on a*

$$\ln(-2x+1) = 0 \iff -2x+1 = 1 \iff -2x = 0 \iff x = 0$$

et comme $0 \in D$ *donc* $S = \{0\}$.

♣ *On a* : $D = \{x \in \mathbb{R} \ / \quad -x > 0 \quad et \quad x+3>0\} = \{x \in \mathbb{R}/ \ x<0 \quad et \ x > -3\} =]-3, 0[$.
Soit $x \in]-3, 0[$, *on a*

$$\begin{aligned}
(E_2) &\iff \ln(-x) + \ln(x+3) = 0 \\
&\iff \ln(-x(x+3)) = 0 \\
&\iff -x(x+3) = 1 \\
&\iff -x^2 - 3x - 1 = 0 \\
&\iff x^2 + 3x + 1 = 0 \\
&\iff x = \frac{\sqrt{5}-3}{2} \quad ou \quad x = \frac{-\sqrt{5}-3}{2}
\end{aligned}$$

et comme : $\dfrac{\sqrt{5}-3}{2} \in D \quad et \quad \dfrac{-\sqrt{5}-3}{2} \in D \quad donc \ S = \left\{\dfrac{-\sqrt{5}-3}{2}, \ \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right\}$.

2. *Résolvons les inéquations suivantes* :

♣ *On a* : $D = \{x \in \mathbb{R}/ \ x^2+2x-3>0\}$, *et comme* $x^2+2x-3>0$ *si et seulement si* $x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$ *donc* $D =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$.
Soit $x \in D$, *on a*

$$\ln\left(x^2+2x-3\right) \geq 0 \iff x^2+2x-3 \geq 1 \iff x^2+2x-4 \geq 0$$

le discriminant de l'équation $x^2+2x-4=0$, *est* $\Delta = 20$ *et ses solutions sont* : $x_1 = -\sqrt{5}-1 \quad et \quad x_2 = \sqrt{5}-1$ *donc*

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}-1$		$\sqrt{5}-1$		$+\infty$
$x2+2x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où : $x \in S \iff \left(x \in]-\infty, -\sqrt{5}-1] \cup \left[\sqrt{5}-1, +\infty\right[\right) \cap (x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[)$
donc

$$S = \left]-\infty, -\sqrt{5}-1\right] \cup \left[\sqrt{5}-1, +\infty\right[$$

♣ *On a :* $D = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x-1 \neq 0 \;\text{ et }\; \dfrac{x+1}{x-1} > 0\right\}$ *et comme* $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$ *si et seulement si* $x \in]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$ *donc*

$$D =]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$$

Soit $x \in D$, *on a*

$$\begin{aligned}(I_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-1} \geq 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-1} - 1 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{x-1} \geq 0\end{aligned}$$

et comme $2 > 0$ *alors le signe de* $\dfrac{2}{x-1}$ *sur* $]-\infty,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ *est celui de* $x-1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\frac{2}{x-1}$		$-$	$\Vert$	$+$	

Donc $x \in S \iff x \in]1,+\infty[\,\cap\,(x \in]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[)$, *d'où*

$$S =]1,+\infty[$$

Propriétés algébriques

Propriété 10 .

Pour deux réels strictements positifs x *et* y *on a :*

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad\qquad (\textit{propriété fondamentale})$$

Propriété 11 .

1. *Pour tout réel strictement positif* x, *on a :* $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$.
2. $\left(\forall (x,y) \in (]0,+\infty[)^2\right)$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout réels strictements positifs* $x_1, x_2, ..., x_n$ *on a*

$$\ln(x_1 \times x_2 \times ... \times x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + ... + \ln(x_n)$$

$$c - \text{à} - d \quad : \quad \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)$$

4. $(\forall x \in]0, +\infty[)\,(\forall r \in \mathbb{Q}), \quad \ln(x^r) = r \ln(x)$

Démonstration 12 .

1. *Soit* x *un réel strictement positif. D'après la propriété fondamentale on a :* $\ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$. *Il s'ensuit donc que :* $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

2. *Soit* x *et* y *deux réels strictement positifs, on a*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

3. *La relation* $\ln(x_1 \times x_2 \times ... \times x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + ... + \ln(x_n)$ *s'établie simplement à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}^*$.

4. *De la relation* 3) *on peut tirer la relation* $\ln(x^n) = n \ln x$, *et ceci pour tout* $x > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$.

   On a de même les relations : $\ln(x^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\ln(x^n) = -n \ln x$ *et* $\ln(x^0) = 0$.

   Par conséquent $(\forall p \in \mathbb{Z})$, $\ln(x^p) = p \ln x$.

   Soit $r = \frac{p}{q}$ *un rationnel de* $\mathbb{Q}$ *où* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$. *Donc*

$$q \ln(x^r) = q \ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \ln(x^p) = p \ln(x)$$

   et alors $\ln(x^r) = \frac{p}{q} \ln x$. *Ainsi* $\ln(x^r) = r \ln(x)$.

Remarque 13 .

$(\forall x \in]0, +\infty[)\,(\forall n \geq 2), \quad \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x \quad$ *et* $\quad \ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \ln x.$

Limites usuelles

Propriété 14 .

♣ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty \qquad$ *et* $\qquad \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$

Tableau de variations de la fonction ln

x	0	1	$+\infty$
$ln'(x)$		$+$	
ln	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Propriété 15 .

L'équation $\ln x = 1$ *admet une unique solution dans* $]0, +\infty[$. *On la note* e :

$$\ln x = 1 \iff x = e$$

Exemple 16 .

Résoudre l'équation suivant : $(E) : \ln^2(x) + 2\ln(x) - 3 = 0$

On a $D =]0, +\infty[$. *Pour résoudre cette équation, on fait le changement de variable suivant, posons :* $X = \ln x$ *avec* $X \in \mathbb{R}$ *et* $x > 0$. *L'équation* (E_3) *devient :* (E') : $X^2 + 2X - 3 = 0.$, *Le discriminant de* (E') *est :* $\Delta = 121$ *et les solutions sont :* $X_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ *et* $X_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$. *Comme* $X = \ln x$ *alors* : $\ln x = 1$ *ou* $\ln x = -3$ *c'est-à-dire* : $x = e$ *ou* $x = e^{-3}$. *D'où*

$$S = \left\{e^{-3}, e\right\}$$

Propriété 17 .

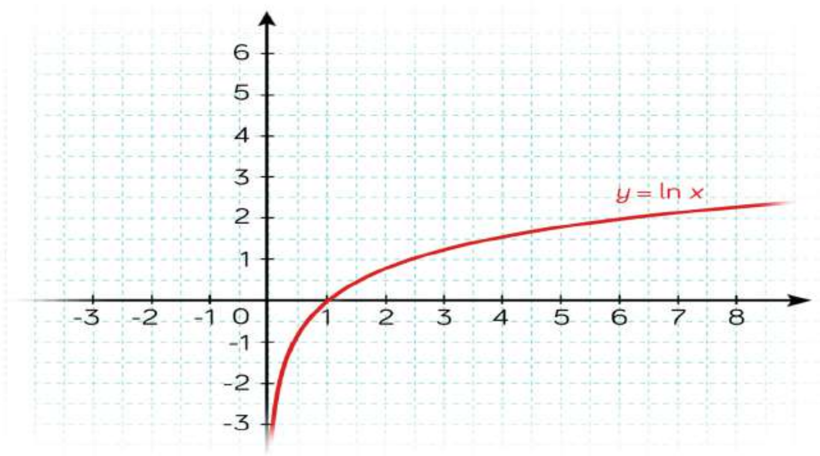
Soit (C) *la courbe représentative de la fonction* ln *dans un repère orthonormé. Alors*

♣ *La courbe* (C) *admet l'axe des ordonnées comme asymptote.*

♣ *La courbe* (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses :* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

♣ *La courbe* (C) *est concave sur* $]0, +\infty[$.

La courbe de la fonction ln



Limites Fondamentales

Propriété 18 .

♣ *On a :* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x\ln x = 0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

♣ *On a :* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ *où* $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} x^n\ln x = 0$ *où* $n\in\mathbb{N}^*$.

Exemple 19 .

Calculons les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x\ln^2(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x\ln\left(\sqrt{x}\right)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}(x-\ln x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(\ln^3(x)+5x-x^2\right)$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{\ln(x+2)}{x+1}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x\ln x}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{x-\ln x}{x+\ln x}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\left(\ln\left(x^2-3x+1\right)-3x\right)$

$\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^+} x\ln^2(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^+}\left(\sqrt{x}\right)^2\ln^2(x)\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^+}\left(\sqrt{x}\ln x\right)^2\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^+}\left(\sqrt{x}\ln\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)\right)^2\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^+}\left(2\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^+} 4\left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2
\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) = 0$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} 4\left(\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\right)^2$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x\ln^2(x) = 0.$

♣ *On a :* $\lim_{x \longrightarrow 0^+} x \ln(\sqrt{x}) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{2} x \ln(x)$ *et comme* $\lim_{x \longrightarrow 0^+} x \ln x = 0$ *donc* $\lim_{x \longrightarrow 0^+} x \ln(\sqrt{x}) = 0.$

♣ *On a :* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ *et comme* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ *alors* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ *donc* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty.$

♣ *On a*

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\ln^3(x) + 5x - x^2\right) &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\ln^3(x) + 5x - x^2\right) \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{\ln^3(x)}{x^2} + \frac{5}{x} - 1\right) \end{aligned}$$

Calculons $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln^3(x)}{x^2}$:

On pose $x = t^{\frac{3}{2}}$ *donc* $\frac{\ln^3(x)}{x^2} = \frac{\left(\ln\left(t^{\frac{3}{2}}\right)\right)^3}{\left(t^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\ln(t\ )\right)^3}{t^3} = \frac{27}{8}\left(\frac{\ln t}{t}\right)^3$, *et comme* $\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$. *D'où* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln^3(x)}{x^2} = 0$, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{5}{x} - 1 = -1$ *donc* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\ln^3(x) + 5x - x^2\right) = -\infty.$

♣ *On a* $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\ln(x+2)}{x+1} = \frac{\ln(0+2)}{0+1} = \ln 2.$

♣ *On a*

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x \ln x} &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x} \times \frac{1}{\ln x} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2} \times \frac{1}{\ln x} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}\ln\left((\sqrt{x})^2\right)} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})} \end{aligned}$$

on a $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$ *et* $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) = 0^-$ *alors* $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})} = -\infty$ *d'où* $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})} = -\infty$ *donc* $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x \ln x} = -\infty.$

♣ *On a*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x-\ln x}{x+\ln x}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{\ln x}{x}\right)}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1-\dfrac{\ln x}{x}}{1+\dfrac{\ln x}{x}}=1$$

donc $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{x-\ln x}{x+\ln x}=1.$

♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\ln\left(x^2-3x+1\right)-3x\right) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x\left(\frac{\ln\left(x^2-3x+1\right)}{x}-3\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x\left(\frac{\ln\left(x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\right)}{x}-3\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x\left(\frac{2\ln x+\ln\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x}-3\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x\left(2\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x}-3\right)\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\left(\ln\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\left(2\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}4\frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2
\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0.$

Dérivée Logarithmique

Propriété 20 .

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose que pour tout x de I, $u(x) > 0$. Alors la fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration 21 .

La fonction u est dérivable sur I. Comme la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout x de I, on a $u(x) > 0$, la fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ c'est-à-dire $\ln \circ u$ est dérivable sur I par composition. De plus

$$(\forall x \in I), \quad (\ln \circ u)'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple 22 .

Étudier la dérivabilité de f sur l'intervalle I, puis calculer $f'(x)$ dans chaque cas :

$f(x) = x^2 - \ln x$, $I =]0,+\infty[$; $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $I =]0,+\infty[$; $f(x) = \sqrt{\ln x}$, $I =]1,+\infty[$

♣ *Les fonctions $u : x \longmapsto x^2$ et $v : x \longmapsto -\ln x$ sont dérivables sur I donc la fonction $f = u + v$ est dérivable sur I, et on a $(\forall x \in I)$, $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$.*

♣ *La fonction $u : x \longmapsto \ln x$ est dérivable sur I et comme la fonction $v : x \longmapsto x$ est dérivable et ne s'annule pas sur I donc la fonction $f = \dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a*

$$(\forall x \in I), \quad f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

♣ *La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en particulier sur I, et comme $(\forall x \in]1,+\infty[)$, $\ln x > 0$ alors la fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$, et on a $(\forall x \in]1,+\infty[)$, $f'(x) = \dfrac{(\ln x)'}{2\sqrt{\ln x}} = \dfrac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.*

Fonction Logarithme de base a

Définition et propriétés

Définition 23 .

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction logarithme de base a est la fonction numérique, notée par $\log_a$, définie sur $]0,+\infty[$ par : $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Remarque 24 .

1. *La fonction logarithme de base e est la fonction logarithme népérien car pour tout $x > 0$,* $\log_e(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$.

2. *On a* $\log_a(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$, $\log_a(1) = \dfrac{\ln(1)}{\ln(a)} = 0$ *et* $\log_a(a^r) = \dfrac{\ln(a^r)}{\ln(a)} = r$ *pour* $r \in \mathbb{Q}$.

3. $(\forall x > 0)\,,\ \log_a'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

   ♣ Si $a > 1$ *alors la fonction* $\log_a$ *est strictement croissante sur* $]0, +\infty[$.

   ♣ Si $0 < a < 1$ *alors la fonction* $\log_a$ *est strictement décroissante sur* $]0, +\infty[$.

Propriété 25 .

♣ *Pour tous réels strictement positifs x et y , et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :*

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad , \quad \log_a(x^r) = r\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \quad , \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

♣ *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels strictement positifs x_1 , x_2 ,..., x_n on a*

$$\log_a(x_1 \times x_2 \times ... \times x_n) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) + ... + \log_a(x_n)$$

Exemple 26 .

Simplifier les nombres $a = \log_2(4)$, $b = \log_{\frac{1}{2}}(2)$ *et* $c = \log_8(64)$.

On a : $a = \log_2(4) = \log_2(2^2) = 2\log_2(2) = 2 \times \dfrac{\ln(2)}{\ln(2)} = 2.$

et : $b = \log_{\frac{1}{2}}(2) = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = -\dfrac{\ln 2}{\ln 2} = -1$

et : $c = \log_8(64) = \log_8(8^2) = 2\log_8(8) = 2.$

Logarithme décimal

Définition 27 .

La fonction logarithme de base 10 est appelée la fonction logarithme décimal. On la note $\log$. *On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:* $\log(x) = \log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Exemple 28 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E) : \log(x+2) + \log(x) = 1.$

Soit D l'ensemble de définition de l'équation (E), on a

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ \ x+2>0 \ \ et \ \ x>0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ \ x>-2 \ \ et \ \ x>0\} \\ &= \left]0,+\infty\right[\end{aligned}$$

Soit $x \in D$, on a

$$\begin{aligned} (E) &\iff \log\left(x\left(x+2\right)\right)=1 \\ &\iff \log\left(x\left(x+2\right)\right)=\log\left(10\right) \\ &\iff x\left(x+2\right)=10 \\ &\iff x^2+2x-10=0 \end{aligned}$$

et puisque le discriminant de l'équation : $x^2+2x-10=0$ et $\Delta=44$ alors les solutions de l'équation $x^2+2x-10=0$ sont : $-1+\sqrt{11}$ et $-1-\sqrt{11}$ et puisque $-1+\sqrt{11}>0$ et $-1-\sqrt{11}<0$, alors l'ensemble de solutions de l'équation (E) est :

$$S=\left\{-1+\sqrt{11}\right\}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com