LES FONCTIONS PRIMITIVES

Les fonctions primitives

Primitive d'une fonction sur un intervalle

Définition 1 .

f est une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet une fonction primitive sur I si, et seulement si il existe une fonction F dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

Exemple 2

1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x$. Déterminer une primitive de f.*

   La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $F(x) = x^2$ est une primitive de f. $(car \quad (\forall x \in \mathbb{R}),\ F'(x) = f(x))$.

2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x + 3$. Déterminer une fonction primitive de f.*

   La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $F(x) = \sin x + 3x$ est une primitive de f. $(car\ (\forall x \in \mathbb{R}), \quad F'(x) = f(x))$.

Théorème 3 .

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Propriété 4 .

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

Toute primitive de f sur I est de la forme $G : x \longmapsto F(x) + k$ où k est une constante réelle.

Démonstration 5 .

G est dérivable sur I et $G' = F' = f$. Donc $(\forall x \in I)$, $G'(x) - F'(x) = (G - F)'(x) = 0$ et comme $(G - F)' = 0$ sur I alors ceci signifie que $G - F = k$ où est une constante réelle. Par conséquent $(\forall x \in I)$, $G(x) = F(x) + k$.

Exemple 6 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x$.

On a déjà vu que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Donc les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto x^2 + k$ où k est une constante réelle.

Primitive prenant une valeur donnée en un point donné

Propriété 7 .

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in I$, il existe une unique primitive G de f sur I vérifiant : $G(x_0) = y_0$.

Démonstration 8 .

Soit F une primitive de f sur I, alors d'après la propriété précédente, toute primitive de f sur I est une fonction G de la forme $G : x \longmapsto F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$. La codition $G(x_0) = y_0$ donne $F(x_0) + k = y_0$ ou encore $k = y_0 - F(x_0)$.

Puisque nous avons trouvé une valeur et une seule de k, il existe donc une primitive et une seule de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$, soit la fonction $x \longmapsto F(x) + y_0 - F(x_0)$.

Exemple 9 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x$.

Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

Les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $F(x) = x^2 + k$ où k est une constante réelle.

La condition $F(1) = 0$ impose : $1 + k = 0$ donc $k = -1$. La primitive de f qui s'annule en 1 est la fonction $F(x) = x^2 - 1$.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	F primitives de f	Intervalle
$f(x) = a$ / où a est une constante	$F(x) = ax + k$ / $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2} + k$ / $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ / $(n \in \mathbb{N}^*)$	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ / $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$ / $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$ / $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$ / $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax + b)$ / $(a \in \mathbb{R}^*)$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax + b) + k$ / $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax + b)$ / $(a \in \mathbb{R}^*)$	$F(x) = -\dfrac{1}{a}\cos(ax + b) + k$ / $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x + k$ / $k \in \mathbb{R}$	$\left]\dfrac{-\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z}$

Opérations sur les primitives

Propriété 10 .

Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors

♣ *$F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.*

♣ *$(\forall k \in \mathbb{R})$, kF est une primitive de kf sur I.*

Le tableau suivant découle des règles de dérivation des fonctions. (u désigne une fonction dérivable sur u

Fonction f	Les primitives F de f	L'intervalle I
$u'u^n \quad / \, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+k \quad / \, k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}+k \quad / \, k \in \mathbb{R}$	$(\forall x \in I), \, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+k \quad / \quad k \in \mathbb{R}$	$(\forall x \in I), \, u(x) > 0$
$\frac{u'}{u^n} \quad / \, (n \geq 2)$	$-\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}+k \quad / \, k \in \mathbb{R}$	$(\forall x \in I), \, u(x) \neq 0$

Exemple 11 .

Déterminer les primitives de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f : x \longmapsto x\left(1+x^2\right)^3 \quad , I = \mathbb{R}.$
2. $f : x \longmapsto (2x-3)(x^2-3x+1)^5 \quad , I = \mathbb{R}.$
3. $f : x \longmapsto 2x(x^2-1)^3 \quad , I = \mathbb{R}.$
4. $f : x \longmapsto (3x-1)^4 \quad , I = \mathbb{R}.$
5. $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad , I = \mathbb{R}.$
6. $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \quad , I = \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[.$
7. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x+5}} \quad , I = \left]\dfrac{-5}{3}, +\infty\right[.$

Solution 12 .

1. *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.*

   Posons : $u(x) = 1+x^2$ alors $u'(x) = 2x$ et $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)u^3(x)$. Les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}u^4(x)+k = \frac{1}{8}\left(1+x^2\right)^4+k$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2. *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.*

   Posons : $u(x) = x^2-3x+1$ alors $u'(x) = 2x-3$ et $f(x) = u'(x)u^5(x)$. Les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{6}u^6(x)+k = \frac{1}{6}\left(x^2-3x+1\right)^6+k$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

3. *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.*

   Posons : $u(x) = x^2-1$ alors $u'(x) = 2x$ et $f(x) = u'(x)u^3(x)$. Les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \frac{1}{4}u^4(x)+k = \frac{1}{4}\left(x^2-1\right)^4+k$ avec $k \in \mathbb{R}$ sont les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

4. *La fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

   Posons : $u(x) = 3x - 1$ *alors* $u'(x) = 3$ *et* $f(x) = \frac{1}{3}u'(x)u^4(x)$. *Les fonctions* F *définies sur* $\mathbb{R}$ *par :* $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}u^5(x) + k = \frac{1}{15}(3x-1)^5 + k$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *sont les primitives de* f *sur* $\mathbb{R}$.

5. *La fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

   Posons : $u(x) = 1 + x^2$ *alors* $u'(x) = 2x$ *et* $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$. *Les fonctions* F *définies sur* $\mathbb{R}$ *par :* $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(x)} + k = \sqrt{1+x^2} + k$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *sont les primitives de* f *sur* $\mathbb{R}$.

6. *Sur* $I = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *le cosinus ne s'annule pas et la fonction* f *est continue sur cet intervalle.*

   Posons $u(x) = \cos x$ *alors* $u'(x) = -\sin x$ *et* $f(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$. *Les fonctions* F *définies sur* $I = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *par :* $F(x) = \frac{1}{\cos x} + k$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *sont les primitives de* f *sur* I.

7. *Sur* $I = \left]\frac{-5}{3}, +\infty\right[$ *on a* $(3x+5) > 0$ *et la fonction* f *est continue sur cet intervalle.*

   Posons : $u(x) = 3x + 5$ *alors* $u'(x) = 3$ *et* $f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{3x+5}}$. *Les fonctions* F *définies sur* $I = \left]\frac{-5}{3}, +\infty\right[$ *par :* $F(x) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{u(x)} + k = \frac{2}{3}\sqrt{3x+5}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *sont les primitives de* f *sur* I.

Exemple 13 .

Déterminer les primitives de la fonction f *dans chacun des cas suivants :*

1. $f : x \longmapsto \cos^3 x . \sin x + 3\sin^4 x \cos x$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \longmapsto x + \frac{3}{\cos^2 x}$, $I = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
3. $f : x \longmapsto \frac{\sin x}{\sqrt{4 + 3\cos x}}$, $I = \mathbb{R}$.

Solution 14 .

1. *La fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

   On a : $f(x) = \cos^3 x . \sin x + 3\sin^4 x \cos x = -\cos^3(\cos x)' + 3\sin^4 x (\sin x)'$ *donc*

   Les fonctions F *définies sur* $I = \mathbb{R}$ *par :* $F(x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{3}{5}\sin^5 x + k$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *sont les primitives de* f *sur* I.

2. *Sur* $I = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *le cosinus ne s'annule pas et la fonction* f *est continue sur cet intervalle.*

Les fonctions F *définies sur* $I = \mathbb{R}$ *par :* $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3\tan x + k$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *sont les primitives de* f *sur* I.

3. *On a* $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{4 + 3\cos x}} = -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{(3\cos x + 4)'}{2\sqrt{4 + 3\cos x}}$.

Les fonctions F *définies sur* $I = \mathbb{R}$ *par :* $F(x) = \frac{-2}{3}\sqrt{3\cos x + 4} + k$ *avec* $k \in \mathbb{R}$ *sont les primitives de* f *sur* I.

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

www.etude – generale.com