Professeur : Yahya MATIOUI

SÉRIE SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

EXERCICE 1 .

1. *On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0,4]$ par :* $f(x) = \left(\dfrac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^2$.

   a) *Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0,4]$.*

   b) *Montrer que :* $f([0,4]) \subset [0,4]$.

2. *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

   a) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 \leq u_n \leq 4$.

   b) *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, puis déduire qu'elle est convergente.*

   c) *Déterminer* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

EXERCICE 2 .

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = u_n + 1 - \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$

1. **a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < u_n < 1$.

   b) *Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.*

2. *Soit f la fonction définie par :* $f(x) = x + 1 - \sqrt{1+x^2}$.

   a) *Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et que $f([0,1]) \subset [0,1]$.*

   b) *Déterminer :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

EXERCICE 3 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^3}{3u_n^2+1} \end{cases}$.

1. **a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n > 0$.

b) *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

2. **a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.

   b) *Déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   c) *Calculer :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

EXERCICE 4 .

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :* $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\,, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-u_n} \end{cases}$.

1. *Calculer* u_2.

2. *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

   a) *Calculer* v_1.

   b) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ v_{n+1} = 3v_n - 1$.

3. *On considère la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ w_n = v_n - \dfrac{1}{2}$.

   a) *Déterminer* w_n *en fonction de* n*, puis déduire* u_n *en fonction de* n.

   b) *Calculer* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

EXERCICE 5 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \ 0 \leq u_n \leq 4$.

2. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

3. **a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 4 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.

   b) *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 4 - u_n \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   c) *Calculer :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

EXERCICE 6 .

On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \dfrac{x}{1+x+x^2}$.

1. **a)** *Étudier les variations de* f.

b) *Déterminer :* $f\left([0,1]\right)$.

2. *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 \leq u_n \leq 1$ *puis* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} < u_n$.

b) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n+1}$ *en déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

c) *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente puis calculer* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

EXERCICE 7 .

1. *Montrer que :* $\left(\forall x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[\right)$, $0 < \dfrac{x^2}{1-2x^2} < \dfrac{1}{2}$.

2. *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = a, \quad a \in \left]0, \dfrac{1}{4}\right[\\ (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{1-2u_n^2} \end{cases}$.

a) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 < u_n < \dfrac{1}{4}$.

b) *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante.*

c) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} < \dfrac{2}{7}u_n$, *déduire que :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**