www.etude-generale.com **1ére BAC S-EXP**

Matière : Mathématiques

Professeur : Yahya MATIOUI

SÉRIE SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

EXERCICE 1 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*),\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+(n+2)\,u_n} \end{cases}$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $v_n = \dfrac{1}{u_n} - n$

1. *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est géométrique.*
2. **a)** *Déterminer* v_n *et* u_n *en fonction de* n.

   b) *Calculer en fonction de* n *la somme :* $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

EXERCICE 2 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*),\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n+5} \end{cases}$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ u_n > 0$.
2. *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{5}{u_n}$.

   a) *Montrer que la suite* (v_n) *est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.*

   b) *Déterminer* v_n *et* u_n *en fonction de* n.

EXERCICE 3 .

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 13 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n < 14$.
2. *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $v_n = 14 - u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

   a) *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$ *puis écrire* v_n *en fonction de* n.

b) *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

EXERCICE 4 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 25}{u_n - 3} \end{cases}$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \neq 5$.
2. *On considère la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $v_n = \dfrac{1}{u_n - 5}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   - **a)** *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique.*
   - **b)** *Déterminer* v_n *puis* u_n *en fonction de* n.
3. **a)** *Calculer :* $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ *en fonction de* n.
   - **b)** *On pose :* $P_n = 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times ... \times 2^{v_n}$ *déterminer* P_n *en fonction de* n.

EXERCICE 5 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 + u_n - 2}{u_n^2} \end{cases}$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \geq 2$.
2. **a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$.
   - **b)** *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

EXERCICE 6 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} \end{cases}$

1. **a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \ u_n > 0$.
   - **b)** *Étudier la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. **a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.
   - **b)** *Déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

EXERCICE 7 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+2} \end{cases}$

1. **a)** *Montrer par récurrence que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*
   b) *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée par* 2.
2. *On pose :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.
   a) *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique en déterminant sa raison et son premier terme.*
   b) *Déterminer* u_n *en fonction de* n.

EXERCICE 8 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n+4} \end{cases}$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 \le u_n \le 4$.
2. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*
   a) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 4 - u_{n+1} \le \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.
   b) *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 4 - u_n \le 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

EXERCICE 9 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} \end{cases}$

1. **a)** *Calculer* u_1.
   b) *Vérifier que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} - 4 = \dfrac{4(u_n-4)}{u_n+2}$ *et* $u_{n+1} - 2 = \dfrac{6(u_n-2)}{u_n+2}$.
   c) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 2 < u_n < 4$.
2. **a)** *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*
   b) *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 3 \le u_n < 4$.
3. **a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < 4 - u_{n+1} \le \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$.
   b) *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < 4 - u_n \le \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

4. *On pose* $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

   a) *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{2}{3}$.

   b) *Déterminer* v_n *et* u_n *en fonction de* n.

   c) *Calculer en fonction de* n *la somme :* $S_n = \dfrac{2}{u_0 - 2} + \dfrac{2}{u_1 - 2} + ... + \dfrac{2}{u_n - 2}$.

EXERCICE 10 .

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = \dfrac{10}{3} \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 3u_n + 9}{u_n} \end{cases}$

   a) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n \geq 3$.

   b) *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 3 \leq u_n \leq \dfrac{10}{3}$.

2. *On considère la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} v_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n^2}{1 + v_n^2} \end{cases}$

   a) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n > 0$ *et* $v_n \leq \dfrac{1}{2}$.

   b) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$. *En déduire que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

3. *Soit* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} t_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ t_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}t_n + \dfrac{3}{2}} \end{cases}$

   Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

4. *Soit* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} w_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$ *où* $f(x) = x^2 - 2x$.

   a) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ w_n \geq 3$.

   b) *Montrer que la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

FIN