# Devoir Surveillé N1 / Durée 2H

**EXERCICE 1** .

1. *On considère la proposition suivante :* $P : (\forall x \in \mathbb{R}), 2x^2 + 4x + 2 \neq 0$.
   *Déterminer la négation de la propostion* $P$, *puis déduire la valeur de vérité de* $P$.
2. *Montrer que :* $\forall (a,b) \in (]0,+\infty[)^2$, $\dfrac{a^2}{a+b} \geq \dfrac{3a-b}{4}$.
3. *Montrer que :* $(\forall x \in [0,+\infty[)$, $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \iff x = 1$.
4. *Montrer que :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $-13x \neq 3y \implies -6x + 4y \neq 7(x+y)$.
5. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation suivante* $(E) : 3 - 2|x-4| = 2x + 5$.
6. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $2^n \geq n+1$.

**EXERCICE 2** .*Soit* $f$ *et* $g$ *les fonctions définies :* $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ *et* $f(x) = \sqrt{x-1}$.

1. *Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions* $f$ *et* $g$.
2. *Représenter dans* ***le même repère*** *orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *les courbes* $(C_f)$ *et* $(C_g)$.
3. *Déterminer graphiquement* $f([1,2])$ *et* $f([2,+\infty[)$.
4. *Résoudre graphiquement l'inéquation :* $f(x) \geq g(x)$
5. *Soit* $h$ *la fonction définie par :* $h(x) = -x + 2 + 2\sqrt{x-1}$.
   **a)** *Vérifier que :* $D_h = [1,+\infty[$.
   **b)** *Vérifier que :* $(\forall x \in [1,+\infty[)$, $h(x) = 2 - \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2$.
   **c)** *Déduire que* $h$ *est majorée par* 2 *sur* $[1,+\infty[$, *est-ce que* 2 *est le maximum de* $h$ *?*
   **d)** *Montrer que :* $(\forall x \in [1,+\infty[)$, $h(x) = (g \circ f)(x)$, *puis déduire la monotonie de* $h$ *sur chacun des intervalles* $[1,2]$ *et* $[2,+\infty[$.
   **e)** *Dresser le tableau de variations de* $h$ *sur* $[1,+\infty[$.
   **f)** *Montrer que :* $(\forall x \in [1,2])$, $1 \leq h(x) \leq 2$

**EXERCICE 3** . *Soit* $f$ *la fonction définie par :* $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$.

1. *Déterminer* $D_f$, *puis montrer que la fonction* $f$ *est impaire.*
2. *Montrer que :* $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = \dfrac{xy - 9}{xy}$ , *où* $x, y \in D_f$ *et* $x \neq y$.
3. *En déduire la monotonie de* $f$ *sur* $]0,3]$ *et sur* $[3,+\infty[$.
4. *Dresser le tableau de variation de* $f$.