CORRECTION SUITES NUMÉRIQUES

EXERCICE 1 .

1. *On considère la fonction numérique f définie sur $[0,4]$ par :* $f(x)=\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^2$.

   a) *Étudions les variations de f sur $[0,4]$.*
   La fonction f est dérivable sur $]0,4[$ et pour tout $x\in]0,4[$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\times\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)'\times\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)\\
&= 2\times\left(\frac{(4\sqrt{x})'(2+\sqrt{x})-4\sqrt{x}(2+\sqrt{x})'}{(2+\sqrt{x})^2}\right)\times\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)\\
&= 2\times\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}\times(2+\sqrt{x})-2\sqrt{x}\times\frac{1}{\sqrt{x}}}{(2+\sqrt{x})^2}\right)\times\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)\\
&= 2\times\left(\frac{\frac{2(2+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}-2}{(2+\sqrt{x})^2}\right)\times\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)\\
&= 2\times\left(\frac{2(2+\sqrt{x})-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}\right)\times\left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)\\
&= 2\times\frac{4}{(2+\sqrt{x})^2}\times\frac{4}{2+\sqrt{x}}\\
&= \frac{32}{(2+\sqrt{x})^3}
\end{aligned}$$

   donc $(\forall x\in]0,4[)$, $f'(x)=\dfrac{32}{(2+\sqrt{x})^3}$.
   Comme $(\forall x\in]0,4[)$, $2+\sqrt{x}>0$ *donc* $(\forall x\in]0,4[)$, $f'(x)>0$, *c'est-à-dire la fonction f est strictement croissante sur $[0,4]$.*

   b) *Montrons que :* $f([0,4])\subset[0,4]$.
   La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0,4]$ donc $f([0,4])=[f(0),f(4)]=[0,4]$ *d'où* $f([0,4])\subset[0,4]$.

2. *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 \leq u_n \leq 4$.

Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = 1$ *donc* $0 \leq u_0 \leq 4$ *par suite la proposition est vraie pour* $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $0 \leq u_n \leq 4$ *et on montre que* $0 \leq u_{n+1} \leq 4$.

On a $0 \leq u_n \leq 4$ *et comme* f *est strictement croissante sur* $[0,4]$ *alors* $f(0) \leq f(u_n) \leq f(4)$ *donc* $0 \leq u_{n+1} \leq 4$.

D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 \leq u_n \leq 4.$$

b) *Montrons par récurrence que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

$($*Montrons que* $:\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} - u_n > 0)$

Pour $n = 0$ *on a* $u_1 - u_0 = \dfrac{16}{9} - 1 = \dfrac{7}{9} > 0$ *et comme* $u_1 - u_0 > 0$ *par suite la proposition est vraie pour* $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_{n+1} - u_n > 0$ *et on montre que :* $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$.

On a $u_{n+1} - u_n > 0$ *c'est-à-dire* $u_{n+1} > u_n$ *et comme la fonction* f *est strictement croissante sur* $[0,4]$ *donc* $f(u_{n+1}) > f(u_n)$ *d'où* $u_{n+2} > u_{n+1}$ *c'est-à-dire* $u_{n+1} - u_n > 0$.

D'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+2} - u_{n+1} > 0$. *C'est-à-dire la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

Déduisons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

On a la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et majorée par* 4, *donc elle est convergente.*

c) *Calculons* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$:

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = f(u_n)$ *telle que* $u_0 \in [0,4]$. *On a* f *est continue sur* $[0,4]$ *et* $f([0,4]) \subset [0,4]$ *et comme la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et sa limite* ℓ $\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell\right)$ *est une solution de l'équation* $f(x) = x$ *dans* $[0,4]$.

Soit $x \in [0,4]$ *, on a*

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)^2 = x \\
&\Longleftrightarrow \frac{16x}{(2+\sqrt{x})^2} = x \\
&\Longleftrightarrow 16x = x\left(2+\sqrt{x}\right)^2 \\
&\Longleftrightarrow x\left(16-\left(2+\sqrt{x}\right)^2\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow x\left(4-2-\sqrt{x}\right)\left(4+2+\sqrt{x}\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow x\left(2-\sqrt{x}\right)\left(6+\sqrt{x}\right) = 0 \\
&\Longleftrightarrow x = 0 \quad ou \quad 2-\sqrt{x} = 0 \quad ou \quad 6+\sqrt{x} = 0 \\
&\Longleftrightarrow x = 0 \quad ou \quad \sqrt{x} = 2 \quad ou \underbrace{\sqrt{x} = -6}_{(impossible)} \\
&\Longleftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = 4
\end{aligned}$$

donc $\ell = 0$ *ou* $\ell = 4$ *et comme la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante alors* $(\forall n \in \mathbb{N})$ *,* $u_n \geq u_0$ *donc* $(\forall n \in \mathbb{N})$ *,* $u_n \geq 1$ *par suite* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \geq 1$ *c'est-à-dire* $\ell \geq 1$ *d'où*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 4.$$

EXERCICE 2 .

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = u_n + 1 - \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$.

1. **a)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < u_n < 1$.

Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = \dfrac{1}{2}$ *et comme* $0 < u_0 < 1$ *par suite la proposition est vraie pour* $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $0 < u_n < 1$ *et on montre que* $0 < u_{n+1} < 1$.

On a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + 1 - \sqrt{1+u_n^2} \\
&= \frac{\left((u_n+1) - \sqrt{1+u_n^2}\right)\left((u_n+1) + \sqrt{1+u_n^2}\right)}{(u_n+1) + \sqrt{1+u_n^2}} \\
&= \frac{(u_n+1)^2 - (1+u_n^2)}{(u_n+1) + \sqrt{1+u_n^2}} \\
&= \frac{u_n^2 + 2u_n + 1 - 1 - u_n^2}{(u_n+1) + \sqrt{1+u_n^2}} \\
&= \frac{2u_n}{(u_n+1) + \sqrt{1+u_n^2}}
\end{aligned}$$

et comme $0 < u_n < 1$ *alors* $\dfrac{2u_n}{(u_n+1)+\sqrt{1+u_n^2}} > 0$ *c'est-à-dire* $u_{n+1} > 0$. (1)

On a

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1}-1 & = & u_n+1-\sqrt{1+u_n^2}-1 \\ & = & u_n-\sqrt{1+u_n^2} \\ & = & \dfrac{u_n^2-(1+u_n^2)}{u_n+\sqrt{1+u_n^2}} \\ & = & \dfrac{-1}{u_n+\sqrt{1+u_n^2}} \end{array}$$

comme $0 < u_n < 1$ *alors* $u_n+\sqrt{1+u_n^2} > 0$ *donc* $\dfrac{-1}{u_n+\sqrt{1+u_n^2}} < 0$ *c'est-à-dire* $u_{n+1}-1 < 0$ *d'où* $u_{n+1} < 1$ (2).
D'après (1) *et* (2) *on déduit que* $0 < u_{n+1} < 1$, *d'après le principe de récurrence* : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 < u_n < 1$.

b) *Montrons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*
Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1}-u_n & = & u_n+1-\sqrt{1+u_n^2}-u_n \\ & = & 1-\sqrt{1+u_n^2} \\ & = & \dfrac{1-(1+u_n^2)}{1+\sqrt{1+u_n^2}} \\ & = & \dfrac{-u_n^2}{1+\sqrt{1+u_n^2}} \end{array}$$

et comme $0 < u_n < 1$ *alors* $\dfrac{-u_n^2}{1+\sqrt{1+u_n^2}} < 0$ *donc* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1}-u_n < 0$. *Ceci signifie que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*
Déduisons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*
On a la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et minorée par* 0, *elle est donc convergente.*

2. *Soit* f *la fonction définie par* : $f(x) = x+1-\sqrt{1+x^2}$.

a) *Montrons que* f *est continue sur* $[0,1]$.
La fonction $u : x \longmapsto x+1$ *est continue sur* $[0,1]$ *et comme la fonction* $v : x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ *est continue sur* $[0,1]$ *alors la fonction* $w = -v$ *est continue sur* $[0,1]$ *donc la fonction* $f = u+w$ *est continue sur* $[0,1]$ (*comme somme de deux fonctions continues sur* $[0,1$
Montrons que : $f([0,1]) \subset [0,1]$:

Soit $x \in [0,1]$ *, on a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x+1-\sqrt{1+x^2}\right)' \\ &= 1-\frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} \\ &= 1-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \\ &= 1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)} \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in [0,1])$ *,* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}$.

On a $(\forall x \in [0,1])$ *,* $f'(x) > 0$*, alors* f *est strictement croissante sur* $[0,1]$ *. D'où* $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[0, 2-\sqrt{2}\right]$ *et comme* $\left[0, 2-\sqrt{2}\right] \subset [0,1]$ *donc*

$$f([0,1]) \subset [0,1].$$

b) *Déterminons* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ *:*

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N})$ *,* $u_{n+1} = f(u_n)$ *telle que* $u_0 \in [0,1]$ *. On a* f *est continue sur* $[0,1]$ *et* $f([0,1]) \subset [0,1]$ *et comme la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et sa limite* ℓ $\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell\right)$ *est une solution de l'équation* $f(x) = x$ *dans* $[0,1]$ *.*

Soit $x \in [0,1]$ *, on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ &\Longleftrightarrow x+1-\sqrt{1+x^2} = x \\ &\Longleftrightarrow 1-\sqrt{1+x^2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{1+x^2} = 1 \\ &\Longleftrightarrow 1+x^2 = 1 \\ &\Longleftrightarrow x^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0.$

EXERCICE 3 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^3}{3u_n^2+1} \end{cases}$

1. **a)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n > 0$:

Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = 1$ *et comme* $u_0 > 0$*, donc la proposition est vraie pour* $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$*. On suppose que* $u_n > 0$ *et on montre que* $u_{n+1} > 0$*.*

On a $u_n > 0$ *alors* $\begin{cases} 2u_n^3 > 0 \\ \\ 3u_n^2 + 1 > 0 \end{cases}$ *donc* $\dfrac{2u_n^3}{3u_n^2+1} > 0$ *c-à-d* $u_{n+1} > 0$*.*

D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,, u_n > 0$$

b) *Étudions la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n^3}{3u_n^2+1} - u_n \\ &= \frac{2u_n^3 - u_n\left(3u_n^2+1\right)}{3u_n^2+1} \\ &= \frac{2u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3u_n^2+1} \\ &= \frac{-u_n^3 - u_n}{3u_n^2+1} \\ &= \frac{-\left(u_n^3 + u_n\right)}{3u_n^2+1} \end{aligned}$$

et comme $\dfrac{-\left(u_n^3+u_n\right)}{3u_n^2+1} < 0$ *donc* $u_{n+1} - u_n < 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. D'où la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante.*

2. **a)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &= \frac{2u_n^3}{3u_n^2+1} - \frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{4u_n^3 - u_n\left(3u_n^2+1\right)}{3u_n^2+1} \\ &= \frac{4u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3u_n^2+1} \\ &= \frac{u_n^3 - u_n}{3u_n^2+1} \\ &= \frac{u_n\left(u_n^2-1\right)}{3u_n^2+1} \\ &= \frac{u_n\left(u_n-1\right)\left(u_n+1\right)}{3u_n^2+1} \end{aligned}$$

et comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante alors* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \leq u_0$ *d'où* $u_n \leq 1$. *On a* $\begin{cases} 3u_n^2+1>0 \\ u_n+1>0 \\ u_n>0 \\ u_n-1\leq 0 \end{cases}$ *donc* $u_{n+1}-\dfrac{1}{2}u_n \leq 0$ *d'où* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.

b) *Déduisons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Pour $n=0$ *on a* $u_0=1$ *et comme* $u_0 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ *donc la proposition est vraie pour* $n=0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *et on montre que* $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

On a $u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *alors* $\dfrac{1}{2}u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ *et comme* $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$ *donc* $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,,\quad u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

c) *Calculons* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$:

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *et comme* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ $\left(car\ -1<\dfrac{1}{2}<1\right)$.

Donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 4 .

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :* $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-u_n} \end{cases}$

1. *Calculons* u_2 :

   On a $u_2 = \dfrac{u_1}{3-u_1} = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$.

2. *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

   a) *On a :* $v_1 = \dfrac{1}{u_1} = 1$.

   b) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ v_{n+1} = 3v_n - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{u_n}{3-u_n}} \\ &= \frac{3-u_n}{u_n} \\ &= \frac{3}{u_n} - 1 \\ &= 3v_n - 1 \end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ v_{n+1} = 3v_n - 1.$

3. *On considère la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ w_n = v_n - \dfrac{1}{2}.$

   a) *Déterminons* w_n *en fonction de* n *:*

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $w_{n+1} = v_{n+1} - \dfrac{1}{2} = 3v_n - 1 - \dfrac{1}{2} = 3v_n - \dfrac{3}{2} = 3\left(v_n - \dfrac{1}{2}\right) = 3w_n.$
   Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ w_{n+1} = 3w_n$, *d'où la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est géométrique de raison* $q = 3$ *et de premier terme* $w_1 = \dfrac{1}{2}.$
   On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ w_n = w_1 \times q^{n-1}$ *donc* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ w_n = \dfrac{1}{2} \times 3^{n-1}.$
   Déduisons v_n *et* u_n *en fonction de* n *:*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{aligned} w_n &= v_n - \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow v_n = w_n + \frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow v_n = \frac{1}{2} \times 3^{n-1} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ \ v_n = \dfrac{1}{2} \times 3^{n-1} + \dfrac{1}{2}.$
   On a : $\ v_n = \dfrac{1}{u_n}$ *d'où* $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} \times 3^{n-1} + \dfrac{1}{2}}$ *donc* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ \ u_n = \dfrac{6}{3^n + 3}.$

   b) *Déterminons* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$ *:*

   On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ \ u_n = \dfrac{6}{3^n + 3}$ *et comme* $3 > 1$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 3^n = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0.$

EXERCICE 5 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \ 0 \leq u_n \leq 4$:

   Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = 0$ *et comme* $0 \leq u_0 \leq 4$, *par suite la proposition est vraie pour* $n = 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $0 \leq u_n \leq 4$ *et on montre que* $0 \leq u_{n+1} \leq 4$.

   On a

$$0 \leq u_n \leq 4 \implies 4 \leq 3u_n + 4 \leq 16 \implies 2 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq 4 \implies 0 \leq u_{n+1} \leq 4$$

   D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 \leq u_n \leq 4$$

2. *Montrons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante :*

   Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{3u_n + 4} - u_n \\ &= \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} \\ &= \frac{-u_n^2 + 3u_n + 4}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} \end{aligned}$$

   le signe de $u_{n+1} - u_n$ *est celui de* $-u_n^2 + 3u_n + 4$ $\left(car\ \ (\forall n \in \mathbb{N}),\ \sqrt{3u_n + 4} + u_n > 0\right)$.

   Étudions le signe du trinôme $-X^2 + 3X + 4$. *Comme l'équation* $-X^2 + 3X + 4 = 0$ *admet deux solutions réelles distinctes* $X_1 = -1$ *et* $X_2 = 4$ *donc le tableau de signe du trinôme* $-X^2 + 3X + 4$ *est le suivant :*

X	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$-X^2+3X+4$		$-$	0	$+$	0	$+$	

   comme $0 \leq u_n \leq 4$ *on a* $-u_n^2 + 3u_n + 4 \geq 0$. $($*car* $(\forall X \in [0,4]),\ \ -X^2 + 3X + 4 \geq 0)$

   donc $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} - u_n \geq 0$, *c'est-à-dire la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

3. **a)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 4 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 2)$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} 4-u_{n+1} &= 4-\sqrt{3u_n+4} \\ &= \frac{16-(3u_n+4)}{4+\sqrt{3u_n+4}} \\ &= \frac{12-3u_n}{4+\sqrt{3u_n+4}} \\ &= \frac{3\left(4-u_n\right)}{4+\sqrt{3u_n+4}} \\ &= \frac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}} \times (4-u_n) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq & \quad u_n \leq 4 \\ \Longrightarrow & \quad 2 \leq \sqrt{3u_n+4} \leq 4 \\ \Longrightarrow & \quad 6 \leq 4+\sqrt{3u_n+4} \leq 8 \\ \Longrightarrow & \quad \frac{1}{8} \leq \frac{1}{4+\sqrt{3u_n+4}} \leq \frac{1}{6} \\ \Longrightarrow & \quad \frac{3}{8} \leq \frac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

alors $\dfrac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}} \times (4-u_n) \leq \dfrac{1}{2}\left(4-u_n\right)$ $(car : 4-u_n \geq 0)$ *d'où*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), 4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(4-u_n\right)$$

b) *Déduisons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $4-u_n \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$:

Pour $n=0$ *on a* $4-u_0=4$ *et comme* $4-u_0 \leq 4\left(\dfrac{1}{4}\right)^0$ *c'est-à-dire la proposition est vraie pour* $n=0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $4-u_n \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *et on montre que* $4-u_{n+1} \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$:

On a $4-u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}\left(4-u_n\right)$ *et comme* $4-u_n \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *alors* $\dfrac{1}{2}\left(4-u_n\right) \leq 4 \times \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *c'est-à-dire* $\dfrac{1}{2}\left(4-u_n\right) \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ *par suite* $4-u_{n+1} \leq 4\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$.

D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \; 4-u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) *Calculons* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$:

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \ 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times 4$. *Comme* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times 4 = 0$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} 4 - u_n = 0$ *donc* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 4$.

EXERCICE 6 .

On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \dfrac{x}{1 + x + x^2}$.

1. **a)** *Étudions les variations de* f :

La fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x+x^2}\right)' = \frac{(1+x+x^2) - x(1+2x)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x+x^2)^2}$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ f'(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(1+x+x^2)^2}$.

Le signe de $f'(x)$ *est celui de* $(1-x)(1+x)$ $\Big($*car* $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ \ (1+x+x^2)^2 > 0\Big)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc f *est strictement croissante sur* $[-1, 1]$ *et strictement décroissante sur chacun des deux intervalles* $]-\infty, -1]$ *et* $[1, +\infty[$.

b) *Déterminons :* $f([0,1])$

On a f *est strictement croissante et continue sur* $[0, 1]$ *donc* $f([0,1]) = [f(0)\,, f(1)] = \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$.

2. *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,, 0 \leq u_n \leq 1$.

Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = 1$ *donc* $0 \leq u_0 \leq 1$ *par suite la proposition est vraie pour* $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $0 \leq u_n \leq 1$ *et on montre que* $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

On a $0 \leq u_n \leq 1$ *et comme* f *est strictement croissante sur* $[0, 1]$ *alors* $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ *donc* $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1}{3} \leq 1$.

D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 \leq u_n \leq 1.$$

Montrons que : $u_{n+1} < u_n$

Pour $n = 0$ *on a* $u_1 < u_0$ *donc la proposition est vraie pour* $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_{n+1} < u_n$ *et on montre que :* $u_{n+2} < u_{n+1}$.

On a $u_{n+1} < u_n$ *et comme la fonction* f *est strictement croissante sur* $[0, 1]$ *donc* $f(u_{n+1}) < f(u_n)$ *d'où* $u_{n+2} < u_{n+1}$.

D'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} < u_n$. *C'est-à-dire la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante.*

b) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{n}{n^2 + n + 1}$. *Donc*

$$f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n^2+n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n^2+n+1)}.$$

comme $(n+1)(n^2+n+1) > 0$ *alors* $f\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n+1} < 0$ *donc* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

Pour $n = 1$ *on a* $u_1 = \dfrac{1}{3}$ *et comme* $0 \leq u_1 \leq 1$ *donc la proposition est vraie pour* $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *On suppose que* $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$ *et on montre que* $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$.

On a $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$ *et comme la fonction* f *est strictement croissante sur* $[0, 1]$ *donc* $f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *or* $f\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n+1}$ *d'où* $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$.

D'après le principe de récurrence on déduit que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

c) *Déduisons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et déterminons sa limite.*

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et minorée par* 0 *donc elle est convergente.* *Comme* $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$ *et on a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *donc* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$.

EXERCICE 7 .

1. *Montrons que :* $\left(\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\right), \quad 0 < \frac{x^2}{1-2x^2} < \frac{1}{2}.$

On considère la fonction f *définie sur* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *par :* $f : x \longmapsto \frac{x^2}{1-2x^2}.$

La fonction f *est dérivable sur* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ *et* $\left(\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right), \quad f'(x) = \frac{2x}{\left(1-2x^2\right)^2} \geq 0$ (*vérifier ce résultat*) *donc* $\left(\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right), f'(x) \geq 0$ (f' *s'annule uniquement en* 0) *,donc la fonction* f *est strictement croissante sur* $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. *D'où* $\left(\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\right), \quad f(0) < f(x) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ *c'est-à-dire*

$$\left(\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\right), \ 0 < \frac{x^2}{1-2x^2} < \frac{1}{2}.$$

2. *On considère la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = a \ , \ a \in \left]0, \frac{1}{4}\right[\\ (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{1-2u_n^2} \end{cases}$

a) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}), \ 0 < u_n < \frac{1}{4}.$

Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = a$ *donc* $0 < u_0 < \frac{1}{4}$ *par suite la proposition est vraie pour* $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $0 < u_n < \frac{1}{4}$ *et on montre que* $0 < u_{n+1} < \frac{1}{4}$.

On a $0 < u_n < \frac{1}{4}$ *et comme* f *est strictement croissante sur* $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ *alors* $f(0) < f(u_n) < f\left(\frac{1}{4}\right)$ *donc* $0 < u_{n+1} < \frac{1}{14} < \frac{1}{4}$.

D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ 0 < u_n < \frac{1}{4}.$$

b) *Montrons la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est strictement décroissante.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{1-2u_n^2} - u_n = u_n\left(\frac{u_n}{1-2u_n^2} - 1\right) = \frac{2u_n(u_n+1)\left(u_n - \frac{1}{2}\right)}{1-2u_n^2}$$

et comme $\begin{cases} u_n > 0 \\ u_n + 1 > 0 \\ 1 - 2u_n^2 > 0 \\ u_n - \dfrac{1}{2} < 0 \end{cases}$ *donc* $\dfrac{2u_n(u_n+1)\left(u_n - \dfrac{1}{2}\right)}{1-2u_n^2} < 0$ *d'où* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} - u_n < 0$. *Par conséquent la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante.*

c) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} < \dfrac{2}{7}u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{2}{7} &= \frac{u_n^2}{1-2u_n^2} - \frac{2}{7} \\ &= \frac{7u_n^2 - 2 + 4u_n^2}{7(1-2u_n^2)} \\ &= \frac{11u_n^2 - 2}{7(1-2u_n^2)} \end{aligned}$$

et comme $0 < u_n < \dfrac{1}{4}$ *alors* $\begin{cases} 11u_n^2 - 2 < 0 \\ 7(1-2u_n^2) > 0 \end{cases}$ *donc* $\dfrac{11u_n^2-2}{7(1-2u_n^2)} < 0$ *d'où* $u_{n+1} - \dfrac{2}{7} < 0$ *par conséquent* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} < \dfrac{2}{7}u_n$.

Déduisons $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$:

On a $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} < \dfrac{2}{7}u_n$ *par récurrence on déduit :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n \leq \left(\dfrac{2}{7}\right)^n u_0$ *d'où* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{2}{7}\right)^n a$ *et comme* $-1 < \dfrac{2}{7} < 1$ *alors* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\dfrac{2}{7}\right)^n = 0$ *donc*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0.$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com