CORRECTION SÉRIE SUITES NUMÉRIQUES

EXERCICE 1 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+(n+2)\,u_n} \end{cases}$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par :* $v_n = \dfrac{1}{u_n} - n.$

1. *Montrons que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est géométrique :*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} - (n+1) \\ &= \frac{1}{\dfrac{2u_n}{1+(n+2)\,u_n}} - (n+1) \\ &= \frac{1+(n+2)\,u_n}{2u_n} - (n+1) \\ &= \frac{1+(n+2)\,u_n - 2u_n\,(n+1)}{2u_n} \\ &= \frac{1+nu_n+2u_n-2nu_n-2u_n}{2u_n} \\ &= \frac{1-nu_n}{2u_n} \\ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1-nu_n}{u_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{u_n}-n\right) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

   donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$ *, d'où la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$ *et de premier terme* $v_1 = 2.$

2. **a)** *Déterminons* v_n *et* u_n *en fonction de* n *:*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ \ v_n = 2^{2-n}$$

Calculons u_n en fonction de n :
On a

$$v_n = \frac{1}{u_n} - n \iff \frac{1}{u_n} = v_n + n \iff u_n = \frac{1}{v_n + n} \iff v_n = \frac{1}{2^{2-n} + n}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ v_n = \frac{1}{2^{2-n} + n}$$

b) *Calculons en fonction de n la somme $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} S_n &= v_1 + v_2 + ... + v_n \\ &= v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \\ &= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ S_n = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

EXERCICE 2 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n + 5} \end{cases}$

1. *Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ u_n > 0$:*

   Pour $n = 1$ on a $u_1 = 1$ et comme $u_1 > 1$ donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u_n > 1$ et on montre que $u_{n+1} > 1$.

   On a $u_n > 0$ alors $5u_n > 0$ et $3u_n + 5 > 0$ donc $\dfrac{5u_n}{3u_n + 5} > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$.

   D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,, u_n > 0$$

2. *On pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ \ v_n = \dfrac{5}{u_n}$*

a) *Montrons que la suite* (v_n)*est arithmétique*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* : $v_{n+1} = \dfrac{5}{u_{n+1}} = \dfrac{5}{\dfrac{5u_n}{3u_n+5}} = \dfrac{5(3u_n+5)}{5u_n} = \dfrac{3u_n+5}{u_n}$ *donc*

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n+5}{u_n} - \frac{5}{u_n} = \frac{3u_n}{u_n} = 3$$

d'où $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $v_{n+1} - v_n = 3$. *Par conséquent la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est arithmétique de raison* $r = 3$ *et de premier terme* $v_1 = \dfrac{5}{u_1} = 5$.

b) *Détermions* v_n *en fonction de* n :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{aligned} v_n &= v_1 + (n-1)r \\ &= 5 + 3(n-1) \\ &= 5 + 3n - 3 \\ &= 2 + 3n \end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $v_n = 2 + 3n$.

Exprimons u_n *en fonction de* n :

On a

$$v_n = \frac{5}{u_n} \iff u_n = \frac{5}{v_n} \iff u_n = \frac{5}{2+3n}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $u_n = \dfrac{5}{2+3n}$.

EXERCICE 3 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par* : $\begin{cases} u_0 = 13 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$

1. *Montrons que* : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n < 14$:

   Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = 13$ *et comme* $u_0 < 14$ *donc la proposition est vraie pour* $n = 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_n < 14$ *et on montre que* $u_{n+1} < 14$.

   On a

   $$u_n < 14 \iff \frac{1}{2}u_n < 7 \iff \frac{1}{2}u_n + 7 < 14 \iff u_{n+1} < 14$$

   D'après le principe de récurrence

   $$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n < 14$$

2. *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par* : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $v_n = 14 - u_n$

a) *Montrons que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\frac{1}{2}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 14 - u_{n+1} \\ &= 14 - \left(\frac{1}{2}u_n + 7\right) \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 7 \\ &= \frac{1}{2}(14 - u_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$. *D'où la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\frac{1}{2}$ *et premier terme* $v_0 = 1$.

Déterminons v_n *en fonction de* n :

On a $v_n = v_0 \times q^n$ *donc* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) *Déduisons que* : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$v_n = 14 - u_n \iff u_n = 14 - v_n \iff u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,, u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

EXERCICE 4 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par* : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 25}{u_n - 3} \end{cases}$

1. *Montrons que* : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \neq 5$:

   Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = 2$ *et comme* $u_0 \neq 5$, *donc la proposition est vraie pour* $n = 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_n \neq 5$ *c'est-à-dire* $u_n - 5 \neq 0$ *et on montre que* $u_{n+1} - 5 \neq 0$.

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1}-5 &= \frac{7u_n-25}{u_n-3}-5 \\ &= \frac{7u_n-25-5(u_n-3)}{u_n-3} \\ &= \frac{7u_n-25-5u_n+15}{u_n-3} \\ &= \frac{2u_n-10}{u_n-3} \\ &= \frac{2(u_n-5)}{u_n-3} \end{aligned}$$

et comme $u_n-5\neq 0$ *alors* $\dfrac{2(u_n-5)}{u_n-3}\neq 0$ *c'est-à-dire* $u_{n+1}-5\neq 0$.
D'après le principe de récurrence

$$(\forall n\in\mathbb{N}),\ u_{n+1}\neq 5$$

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $(\forall n\in\mathbb{N}),\ v_n=\dfrac{1}{u_n-5}$.

a) *Montrons que la suite* (v_n) *est arithmétique :*
Soit $n\in\mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}-5} \\ &= \frac{1}{\frac{2(u_n-5)}{u_n-3}} \\ &= \frac{u_n-3}{2(u_n-5)} \end{aligned}$$

donc : $v_{n+1}-v_n=\dfrac{u_n-3}{2(u_n-5)}-\dfrac{2}{2(u_n-5)}=\dfrac{u_n-5}{2(u_n-5)}=\dfrac{1}{2}$.
d'où $(\forall n\in\mathbb{N}),\ v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{2}$. *Ainsi la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique de rasion* $r=\dfrac{1}{2}$ *et de premier terme* $v_0=\dfrac{1}{u_0-5}=-\dfrac{1}{3}$.

b) *Déterminons* v_n *en fonction de* n *:*
Soit $n\in\mathbb{N}$, *on a* $v_n=v_0+nr$ *donc*

$$(\forall n\in\mathbb{N}),v_n=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n$$

Calculons u_n *en fonction de* n *:*

On a

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{u_n - 5} \\ &\Longleftrightarrow \quad v_n\left(u_n - 5\right) = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad u_n = \frac{1 + 5v_n}{v_n} \\ &\Longleftrightarrow \quad u_n = \frac{1 + 5\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n\right)}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n} = \frac{15n - 4}{3n - 2} \end{aligned}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n = \frac{15n - 4}{3n - 2}$$

3. **a)** *Calculons* $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ *en fonction de* n *:*
Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + ... + v_n \\ &= \frac{(v_0 + v_n)}{2} \times (n+1) \\ &= \frac{\left(\frac{-1}{3} + -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n\right)}{2} \times (n+1) \\ &= \frac{\left(\frac{-2}{3} + \frac{1}{2}n\right)}{2} \times (n+1) \\ &= \frac{\left(\frac{-4 + 3n}{6}\right)}{2} \times (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(3n-4)}{12} \end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N})$, $S_n = \dfrac{(n+1)(3n-4)}{12}$.

b) *On pose* $P_n = 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times ... \times 2^{v_n}$. *Déterminons* P_n *en fonction de* n *:*
Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} P_n &= 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times ... \times 2^{v_n} \\ &= 2^{v_0 + v_1 + ... + v_n} \\ &= 2^{S_n} \\ &= 2^{\frac{(n+1)(3n-4)}{12}} \end{aligned}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ P_n = 2^{\left(\frac{(n+1)(3n-4)}{12}\right)}$$

EXERCICE 5 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 + u_n - 2}{u_n^2} \end{cases}$

1. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \geq 2$.

   Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = 3$ *et comme* $u_0 \geq 2$, *donc la proposition est vraie pour* $n = 0$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_n \geq 2$ *et on montre que* $u_{n+1} \geq 2$.

   On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= \frac{2u_n^2 + u_n - 2}{u_n^2} - 2 \\ &= \frac{2u_n^2 + u_n - 2 - 2u_n^2}{u_n^2} \\ &= \frac{u_n - 2}{u_n^2} \end{aligned}$$

   et comme $u_n \geq 2$ *alors* $u_n - 2 \geq 0$ *et* $u_n^2 > 0$ *donc* $\dfrac{u_n - 2}{u_n^2} \geq 0$ *c'est-à-dire* $u_{n+1} - 2 \geq 0$ *d'où* $u_{n+1} \geq 2$.

   D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \geq 2.$$

2. **a)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} - 2 \leq \dfrac{1}{4}(u_n - 2)$:

   Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$u_{n+1} - 2 = \frac{u_n - 2}{u_n^2} = (u_n - 2) \times \frac{1}{u_n^2}$$

   On a $u_n \geq 2$ *alors* $u_n^2 \geq 4$ *par suite* $\dfrac{1}{u_n^2} \leq \dfrac{1}{4}$ *donc* $(u_n - 2) \times \dfrac{1}{u_n^2} \leq \dfrac{1}{4}(u_n - 2)$ *d'où*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,, u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$$

   b) *Déduisons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$:

   Pour $n = 0$ *on a* $u_0 - 2 = 1$ *et comme* $0 \leq u_0 - 2 \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^0$ *c'est-à-dire la proposition est vraie pour* $n = 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $0 \leq u_n - 2 \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ *et on montre que* $0 \leq u_{n+1} - 2 \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$.

On a $u_{n+1}-2 \leq \frac{1}{4}(u_n-2)$ *et comme* $0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ *alors* $0 \leq \frac{1}{4}(u_n-2) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ *par suite* $0 \leq u_{n+1}-2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

EXERCICE 6 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^3}{3u_n^2+1} \end{cases}$

1. **a)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}), \ u_n > 0$:

Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = 1$ *et comme* $u_0 > 0$, *donc la proposition est vraie pour* $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_n > 0$ *et on montre que* $u_{n+1} > 0$.

On a $u_n > 0$ *alors* $\begin{cases} 2u_n^3 > 0 \\ 3u_n^2 + 1 > 0 \end{cases}$ *donc* $\dfrac{2u_n^3}{3u_n^2+1} > 0$ *c-à-d* $u_{n+1} > 0$.

D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > 0$$

b) *Étudions la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n^3}{3u_n^2+1} - u_n \\ &= \frac{2u_n^3 - u_n(3u_n^2+1)}{3u_n^2+1} \\ &= \frac{2u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3u_n^2+1} \\ &= \frac{-u_n^3 - u_n}{3u_n^2+1} \\ &= \frac{-(u_n^3+u_n)}{3u_n^2+1} \end{aligned}$$

et comme $\dfrac{-(u_n^3+u_n)}{3u_n^2+1} < 0$ *donc* $u_{n+1} - u_n < 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *D'où la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante.*

2. **a)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &= \frac{2u_n^3}{3u_n^2+1} - \frac{1}{2}u_n \\
&= \frac{4u_n^3 - u_n\left(3u_n^2+1\right)}{3u_n^2+1} \\
&= \frac{4u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3u_n^2+1} \\
&= \frac{u_n^3 - u_n}{3u_n^2+1} \\
&= \frac{u_n\left(u_n^2-1\right)}{3u_n^2+1} \\
&= \frac{u_n\left(u_n-1\right)\left(u_n+1\right)}{3u_n^2+1}
\end{aligned}$$

et comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante alors* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \leq u_0$ *d'où* $u_n \leq 1$. *On a* $\begin{cases} 3u_n^2+1>0 \\ u_n+1>0 \\ u_n>0 \\ u_n-1\leq 0 \end{cases}$ *donc* $u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n \leq 0$ *d'où* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$.

b) *Déduisons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Pour $n=0$ *on a* $u_0=1$ *et comme* $u_0 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ *donc la proposition est vraie pour* $n=0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *et on montre que* $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

On a $u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *et* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$ *alors*

$$u_n \times \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$$

donc $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,,\quad u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

EXERCICE 7 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \; u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+2} \end{cases}$

1. **a)** *Montrons par récurrence que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante :*

   $($*Montrons que* $:\ (\forall n \in \mathbb{N}), \; u_{n+1} - u_n > 0)$

   Pour $n = 0$ *on a* $u_1 - u_0 = \dfrac{5}{3} - 1 = \dfrac{2}{3}$ *et comme* $u_1 - u_0 > 0$ *donc la proposition est varie pour* $n = 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_{n+1} - u_n > 0$ *et on montre que* $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$.

   On a

$$\begin{aligned}
u_{n+2} - u_{n+1} &= \frac{2u_{n+1}+3}{u_{n+1}+2} - \frac{2u_n+3}{u_n+2} \\
&= \frac{(2u_{n+1}+3)(u_n+2) - (2u_n+3)(u_{n+1}+2)}{(u_{n+1}+2)(u_n+2)} \\
&= \frac{2u_{n+1}u_n + 4u_{n+1} + 3u_n + 6 - (2u_nu_{n+1} + 4u_n + 3u_{n+1} + 6)}{(u_{n+1}+2)(u_n+2)} \\
&= \frac{2u_{n+1}u_n + 4u_{n+1} + 3u_n + 6 - 2u_nu_{n+1} - 4u_n - 3u_{n+1} - 6}{(u_{n+1}+2)(u_n+2)} \\
&= \frac{2u_{n+1}u_n + 4u_{n+1} + 3u_n + 6 - 2u_nu_{n+1} - 4u_n - 3u_{n+1} - 6}{(u_{n+1}+2)(u_n+2)} \\
&= \frac{4u_{n+1} + 3u_n - 4u_n - 3u_{n+1}}{(u_{n+1}+2)(u_n+2)} \\
&= \frac{4(u_{n+1} - u_n) - 3(u_{n+1} - u_n)}{(u_{n+1}+2)(u_n+2)} \\
&= \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_{n+1}+2)(u_n+2)}
\end{aligned}$$

   On a $u_n > 0$ *et* $u_{n+1} > 0$ (*vérifier ce résultat*) *donc* $(u_{n+1}+2)(u_n+2) > 0$ *et comme* $u_{n+1} - u_n > 0$ *alors* $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{(u_{n+1}+2)(u_n+2)} > 0$ *c'est-à-dire* $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$.

   D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n > 0$$

   ceci signifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

   b) *Montrons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée par* 2 $($*Montrons que* $:\ (\forall n \in \mathbb{N}), \; u_n \leq 2)$.

   Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = 1$ *et comme* $u_0 \leq 2$, *par suite la proposition est vraie pour* $n = 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_n \leq 2$, *et on montre* $u_{n+1} \leq 2$.

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1}-2 &= \frac{2u_n+3}{u_n+2}-2 \\ &= \frac{2u_n+3-2\left(u_n+2\right)}{u_n+2} \\ &= \frac{2u_n+3-2u_n-4}{u_n+2} \\ &= \frac{-1}{u_n+2} \end{aligned}$$

et comme $u_n>0$ *alors* $u_n+2>0$ *donc* $\frac{-1}{u_n+2}<0$ *par suite* $u_{n+1}-2\leq 0$ *d'où* $u_{n+1}\leq 2$.
D'après le principe de récurrence

$$(\forall n\in\mathbb{N})\,,\ u_n\leq 2$$

2. *On pose :* $(\forall n\in\mathbb{N})\,,\ v_n=\frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}$.

   a) *Montrons que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique :*

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\sqrt{3}}{u_{n+1}+\sqrt{3}} \\
&= \frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+2}-\sqrt{3}}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+2}+\sqrt{3}} \\
&= \frac{\dfrac{2u_n+3-\sqrt{3}\left(u_n+2\right)}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+3+\sqrt{3}\left(u_n+2\right)}{u_n+2}} \\
&= \frac{2u_n+3-\sqrt{3}u_n-2\sqrt{3}}{2u_n+3+\sqrt{3}u_n+2\sqrt{3}} \\
&= \frac{u_n\left(2-\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{u_n\left(2+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right)} \\
&= \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(u_n-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(u_n+\sqrt{3}\right)} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \times \frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \times v_n \\
&= \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3} \times v_n \\
&= \left(7-4\sqrt{3}\right) \times v_n
\end{aligned}$$

donc

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}\right), v_{n+1} = \left(7-4\sqrt{3}\right) v_n$$

d'où la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 7-4\sqrt{3}$ et premier terme $v_0 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2.$

b) *Déterminons u_n en fonction de n :*

On a $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right), v_n = \left(\sqrt{3}-2\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)^n . \left(\begin{array}{c}\textit{car la suite } \left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ \textit{est géométrique de raison } q = 7-4\sqrt{3}\end{array}\right).$

On a

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}\\
&\Longleftrightarrow\quad v_n\left(u_n+\sqrt{3}\right)=u_n-\sqrt{3}\\
&\Longleftrightarrow\quad v_nu_n+\sqrt{3}v_n=u_n-\sqrt{3}\\
&\Longleftrightarrow\quad v_nu_n-u_n=-\sqrt{3}-\sqrt{3}v_n\\
&\Longleftrightarrow\quad u_n\left(v_n-1\right)=-\sqrt{3}-\sqrt{3}v_n\\
&\Longleftrightarrow\quad u_n=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}v_n}{1+v_n}\\
&\Longleftrightarrow\quad u_n=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}\left(\left(\sqrt{3}-2\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)^n\right)}{1+\left(\sqrt{3}-2\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)^n}\\
&\Longleftrightarrow\quad u_n=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)^n+\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}-2\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)^n}
\end{aligned}$$

donc

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ u_n=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)^n+\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}-2\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)^n}$$

EXERCICE 8 .

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0=0\\ \left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ u_{n+1}=\sqrt{3u_n+4}\end{cases}$

1. *Montrons que :* $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ \ 0\leq u_n\leq 4$ *:*

   Pour $n=0$ *on a* $u_0=0$ *et comme* $0\leq u_0\leq 4$*, par suite la proposition est vraie pour* $n=0$.

   Soit $n\in\mathbb{N}$. *On suppose que* $0\leq u_n\leq 4$ *et on montre que* $0\leq u_{n+1}\leq 4$.

   On a

   $$0\leq u_n\leq 4\implies 4\leq 3u_n+4\leq 16\implies 2\leq\sqrt{3u_n+4}\leq 4\implies 0\leq u_{n+1}\leq 4$$

   D'après le principe de récurrence

   $$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\ 0\leq u_n\leq 4$$

2. *Montrons que la suite* $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante :*

   Soit $n\in\mathbb{N}$*, on a*

   $$\begin{aligned}
   u_{n+1}-u_n &= \sqrt{3u_n+4}-u_n\\
   &= \frac{3u_n+4-u_n^2}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}\\
   &= \frac{-u_n^2+3u_n+4}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}
   \end{aligned}$$

le signe de $u_{n+1} - u_n$ *est celui de* $-u_n^2 + 3u_n + 4$ $\left(car\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ \sqrt{3u_n + 4} + u_n > 0 \right).$
Étudions le signe du trinôme $-X^2 + 3X + 4$*. Comme l'équation* $-X^2 + 3X + 4 = 0$ *admet deux solutions réelles distinctes* $X_1 = -1$ *et* $X_2 = 4$ *donc le tableau de signe du trinôme* $-X^2 + 3X + 4$ *est le suivant :*

X	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$-X^2+3X+4$		$-$	0	$+$	0	$+$	

comme $0 \leq u_n \leq 4$ *on a* $-u_n^2 + 3u_n + 4 \geq 0$. $\left(car\ (\forall X \in [0,4]),\ -X^2 + 3X + 4 \geq 0 \right)$
donc $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, *c'est-à-dire la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est croissante.*

3. **a)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 4 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 2)$ *:*

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned}
4 - u_{n+1} &= 4 - \sqrt{3u_n + 4} \\
&= \frac{16 - (3u_n + 4)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \\
&= \frac{12 - 3u_n}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \\
&= \frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \\
&= \frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \times (4 - u_n)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
0 &\leq u_n \leq 4 \\
&\Longrightarrow 2 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq 4 \\
&\Longrightarrow 6 \leq 4 + \sqrt{3u_n + 4} \leq 8 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{6} \\
&\Longrightarrow \frac{3}{8} \leq \frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

alors $\dfrac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \times (4 - u_n) \leq \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$ $(car : 4 - u_n \geq 0)$ *d'où*

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

b) *Déduisons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 4 - u_n \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *:*

Pour $n=0$ *on a* $4-u_0=4$ *et comme* $4-u_0 \leq 4\left(\frac{1}{4}\right)^0$ *c'est-à-dire la proposition est vraie pour* $n=0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $4-u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *et on montre que* $4-u_{n+1} \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$:

On a $4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n)$ *et comme* $4-u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *alors* $\frac{1}{2}(4-u_n) \leq 4\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *c'est-à-dire* $\frac{1}{2}(4-u_n) \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ *par suite* $4-u_{n+1} \leq 4\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ 4-u_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

EXERCICE 9 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} \end{cases}$

1. **a)** *On a :* $u_1 = \dfrac{8(u_0-1)}{u_0+2} = \dfrac{8(3-1)}{3+2} = \dfrac{16}{5}$.

b) *Vérifions que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1}-4 = \dfrac{4(u_n-4)}{u_n+2}$ *et* $u_{n+1}-2 = \dfrac{6(u_n-2)}{u_n+2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1}-4 &= \frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-4 \\ &= \frac{8(u_n-1)-4(u_n+2)}{u_n+2} \\ &= \frac{8u_n-8-4u_n-8}{u_n+2} \\ &= \frac{4u_n-16}{u_n+2} \\ &= \frac{4(u_n-4)}{u_n+2} \end{aligned}$$

et $u_{n+1}-2 = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2}-2 = \dfrac{8u_n-8-2u_n-4}{u_n+2} = \dfrac{6u_n-12}{u_n+2} = \dfrac{6(u_n-2)}{u_n+2}$

donc : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1}-4 = \dfrac{4(u_n-4)}{u_n+2}$ *et* $u_{n+1}-2 = \dfrac{6(u_n-2)}{u_n+2}$.

c) *Montrons que* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 2 < u_n < 4$.

Pour $n=0$ on a $u_0=3$ et comme $2<u_0<4$ par suite la proposition est varie pour $n=0$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $2<u_n<4$ et on montre que $2<u_{n+1}<4$. (c'est-à-dire montrons que $2<u_{n+1}$ et $u_{n+1}<4$).
On a $u_{n+1}-4=\dfrac{4(u_n-4)}{u_n+2}$
on a $2<u_n<4$ alors $-2<u_n-4<0$ et comme $u_n+2>0$ donc $\dfrac{4(u_n-4)}{u_n+2}<0$
c'est-à-dire $u_{n+1}<4 \quad (1)$
On a $u_{n+1}-2=\dfrac{6(u_n-2)}{u_n+2}$
on a $2<u_n<4$ alors $0<u_n-2<2$ et comme $u_n+2>0$ donc $\dfrac{6(u_n-2)}{u_n+2}>0$
c'est-à-dire $u_{n+1}>4 \quad (2)$
De (1) et (2) on déduit que $2<u_{n+1}<4$. D'après le principe de récurrence on déduit que

$$(\forall n\in\mathbb{N}),2<u_n<4.$$

2. **a)** *Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante*
Soit $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{8u_n-8}{u_n+2}-u_n \\ &= \frac{8u_n-8-u_n^2-2u_n}{u_n+2} \\ &= \frac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2} \end{aligned}$$

On considère le trinôme $-x^2+6x-8$, puisque l'équation $-x^2+6x-8=0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1=2$ et $x_2=4$ donc : $(\forall x\in\mathbb{R})$, $-x^2+6x-8=(4-x)(x-2)$. D'où

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(4-u_n)(u_n-2)}{u_n+2}$$

et comme $2<u_n<4$ alors $\begin{cases} 4-u_n>0 \\ u_n-2>0 \\ u_n+2>0 \end{cases}$, alors $\dfrac{(4-u_n)(u_n-2)}{u_n+2}>0$ c'est-à-dire : $(\forall n\in\mathbb{N})$, $u_{n+1}-u_n>0$. Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

b) *Déduisons que : $(\forall n\in\mathbb{N})$, $3\leq u_n<4$.*
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et $u_0=3$ alors $(\forall n\in\mathbb{N})$, $u_n\geq u_0$. Et $u_n<4$ donc

$$(\forall n\in\mathbb{N}),\quad 3\leq u_n<4$$

3. **a)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$4 - u_{n+1} = \frac{4(u_n - 4)}{u_n + 2} = \frac{4}{u_n + 2} \times (4 - u_n)$$

On a

$$\begin{aligned} 3 &\leq u_n < 4 \\ &\iff 5 \leq u_n + 2 < 6 \\ &\iff \frac{1}{6} < \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5} \\ &\iff \frac{2}{3} < \frac{4}{u_n + 2} \leq \frac{4}{5} \\ &\implies 0 < \frac{4}{u_n + 2} \leq \frac{4}{5} \qquad \left(\textit{car } 0 < \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

et comme $4 - u_n > 0$ *alors* $0 < \frac{4}{u_n + 2} \times (4 - u_n) \leq \frac{4}{5} \times (4 - u_n)$ *donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,, 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

b) *Déduisons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$:

Pour $n = 0$ *on a* $4 - u_0 = 1$ *et comme* $0 < 4 - u_0 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^0$ *c'est-à-dire la proposition est vraie pour* $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ *et on montre que* $0 < 4 - u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$.

On a $0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$ *et comme* $\underbrace{0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n}_{H.R}$ *alors* $0 < \frac{4}{5}(4 - u_n) \leq \frac{4}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$ *c'est-à-dire* $0 < \frac{4}{5}(4 - u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$ *donc* $0 < 4 - u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$.

D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,, 0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

4. *On pose* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$.

a) *Montrons que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\frac{2}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}-2} \\ &= \frac{\dfrac{4(u_n-4)}{u_n+2}}{\dfrac{6(u_n-2)}{u_n+2}} \\ &= \frac{4(u_n-4)}{6(u_n-2)} \\ &= \frac{2}{3}\times\frac{u_n-4}{u_n-2} \\ &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

donc $(\forall n\in\mathbb{N})$, $v_{n+1}=\frac{2}{3}v_n$. *D'où la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\frac{2}{3}$ *et de premier terme* $v_0=\dfrac{u_0-4}{u_0-2}=-1$.

b) *Déterminons* v_n *et* u_n *en fonction de* n :

On a $(\forall n\in\mathbb{N})$, $v_n=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$. $\left(\text{car la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{2}{3} \text{ et } v_0=-1\right)$.

On a

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n-4}{u_n-2} \\ &\Longleftrightarrow\ v_n(u_n-2)=u_n-4 \\ &\Longleftrightarrow\ v_nu_n-2v_n=u_n-4 \\ &\Longleftrightarrow\ v_nu_n-u_n=-4+2v_n \\ &\Longleftrightarrow\ u_n(v_n-1)=2v_n-4 \\ &\Longleftrightarrow\ u_n=\frac{2v_n-4}{v_n-1} \\ &\Longleftrightarrow\ u_n=\frac{-2\left(\frac{2}{3}\right)^n-4}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n-1} \\ &\Longleftrightarrow\ u_n=\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} \end{aligned}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ u_n = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 4}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

b) *Calculons* $S_n = \dfrac{2}{u_0 - 2} + \dfrac{2}{u_1 - 2} + ... + \dfrac{2}{u_n - 2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2 - 2}{u_n - 2} = 1 - \frac{2}{u_n - 2}$$

donc : $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n - 2} \iff \dfrac{2}{u_n - 2} = 1 - v_n$ *d'où*

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{2}{u_0 - 2} + \frac{2}{u_1 - 2} + ... + \frac{2}{u_n - 2} \\
&= (1 - v_0) + (1 - v_1) + ... + (1 - v_n) \\
&= \left(\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{(n+1)\ fois}\right) - (v_0 + v_1 + ... + v_n) \\
&= (n+1) - v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\
&= (n+1) + \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \\
&= (n+1) + 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ S_n = n + 1 + 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

EXERCICE 10 .

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par* : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{10}{3} \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 3u_n + 9}{u_n} \end{cases}$

a) *Montrons que* : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \geq 3$

Pour $n = 0$ *alors* $u_0 = \dfrac{10}{3}$ *et comme* $u_0 \geq 3$, *par suite la proposition est vraie pour* $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \geq 3$ et on montre que $u_{n+1} \geq 3$.
On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 3 &= \frac{u_n^2 - 3u_n + 9}{u_n} - 3 \\ &= \frac{u_n^2 - 3u_n + 9 - 3u_n}{u_n} \\ &= \frac{u_n^2 - 6u_n + 9}{u_n} \\ &= \frac{(u_n - 3)^2}{u_n} \end{aligned}$$

comme $u_n \geq 3$ alors $u_n > 0$ donc $\dfrac{(u_n - 3)^2}{u_n} \geq 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} - 3 \geq 0$ d'où $u_{n+1} \geq 3$.
D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_n \geq 3$$

b) *Déduisons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante*
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2 - 3u_n + 9}{u_n} - u_n \\ &= \frac{u_n^2 - 3u_n + 9 - u_n^2}{u_n} \\ &= \frac{-3u_n + 9}{u_n} \\ &= \frac{-3(u_n - 3)}{u_n} \end{aligned}$$

comme $u_n \geq 3$ alors $u_n - 3 \geq 0$ par suite $-3(u_n - 3) \leq 0$ et $u_n > 0$ donc $\dfrac{-3(u_n - 3)}{u_n} \leq 0$ c'est-à-dire : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
D'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Déduisons : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $3 \leq u_n \leq \dfrac{10}{3}$.
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $u_0 = 3$ alors $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n \leq u_0$ c'est-à-dire $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n \leq \dfrac{10}{3}$ et comme $u_n \geq 3$ donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ 3 \leq u_n \leq \frac{10}{3}$$

2. *On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :* $\begin{cases} v_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n^2}{1 + v_n^2} \end{cases}$

a) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ v_n > 0$ *et* $v_n \leq \dfrac{1}{2}$:

Pour $n = 0$ *on a* $v_0 = \dfrac{1}{2}$ *et* $v_1 = \dfrac{2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{2}{5}$ *et comme* $v_0 > 0$ *et* $v_0 \leq \dfrac{1}{2}$, *par suite la proposition est vraie pour* $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $v_n > 0$ *et* $v_n \leq \dfrac{1}{2}$ *et on montre que* $v_{n+1} > 0$ *et* $v_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}$

On a $v_n > 0$ *alors* $\begin{cases} 2v_n^2 > 0 \\ \\ 1 + v_n^2 > 0 \end{cases}$ *donc* $v_{n+1} > 0$.

On a : $v_{n+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2v_n^2}{1+v_n^2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4v_n^2 - 1 - v_n^2}{1+v_n^2} = \dfrac{3v_n^2 - 1}{1+v_n^2}$

comme $0 < v_n \leq \dfrac{1}{2}$ *alors* $0 < v_n^2 \leq \dfrac{1}{4}$ *par suite* $0 < 3v_n^2 \leq \dfrac{3}{4}$ *donc* $-1 < 3v_n^2 - 1 \leq \dfrac{-1}{4}$ *et* $1 + v_n^2 > 0$ *d'où* $v_{n+1} - \dfrac{1}{2} \leq 0$ *c'est-à-dire* $v_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ v_n > 0 \quad et \quad v_n \leq \frac{1}{2}$$

b) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ v_n > 0$ *donc*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{2v_n^2}{1+v_n^2}}{v_n} = \frac{2v_n^2}{(1+v_n^2) \times v_n} = \frac{2v_n}{1+v_n^2}$$

On a : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \dfrac{2v_n}{1+v_n^2} - 1 = \dfrac{2v_n - 1 - v_n^2}{1+v_n^2} = \dfrac{-\left(v_n^2 - 2v_n + 1\right)}{1+v_n^2} = \dfrac{-\left(v_n - 1\right)^2}{1+v_n^2}$

comme $1 + v_n^2 > 0$ *alors* $\dfrac{-\left(v_n - 1\right)^2}{1+v_n^2} \leq 0$ *c'est-à-dire* $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - 1 \leq 0$ *donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$$

Déduisons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante*

On a $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ *donc* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ v_{n+1} \leq v_n$. *D'où la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

3. *Soit* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} t_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ t_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}t_n + \dfrac{3}{2}} \end{cases}$

   Montrons que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

   ($Montrons par récurrence que :$ $(\forall n \in \mathbb{N}),\ t_{n+1} - t_n > 0$).

   Pour $n = 0$ *on a* $t_1 - t_0 = \sqrt{2} - 1$ *et comme* $t_1 - t_0 > 0$ *par suite la proposition est vraie pour* $n = 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $t_{n+1} - t_n > 0$ (*c'est-à-dire* $t_{n+1} > t_n$) *et on montre que* $t_{n+2} - t_{n+1} > 0$ (*c'est-à-dire* $t_{n+2} > t_{n+1}$).

   On a : $t_{n+1} > t_n \iff \frac{1}{2}t_{n+1} > \frac{1}{2}t_n \iff \frac{1}{2}t_{n+1} + \frac{3}{2} > \frac{1}{2}t_n + \frac{3}{2}$ *donc* $\sqrt{\frac{1}{2}t_{n+1} + \frac{3}{2}} > \sqrt{\frac{1}{2}t_n + \frac{3}{2}}$ (*car la fonction* $x \longmapsto \sqrt{x}$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ t_n > 0$).
   D'où $t_{n+2} > t_{n+1}$.

   D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ t_{n+1} > t_n$$

   donc la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

4. *Soit* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} w_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$ *où* $f(x) = x^2 - 2x$.

   Le tableau de variations de f *:*

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

   a) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ w_n \geq 3$.

   Pour $n = 0$ *on a* $w_0 = 1$ *et comme* $w_0 \geq 3$ *par suite la proposition est vraie pour* $n = 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $w_n \geq 3$ *et on montre que* $w_{n+1} \geq 3$.

   On a $w_n \geq 3$ *et comme la fonction* f *est strictement croissante sur* $[1, +\infty[$ *donc* $f(w_n) \geq f(3)$ *d'où* $w_{n+1} \geq 3$. (*car* $f(3) = 3$ *et* $f(w_n) = w_{n+1}$).

   D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}), w_n \geq 3$$

b) *Montrons que la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante*

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{array}{rcl} w_{n+1} - w_n & = & w_n^2 - 2w_n - w_n \\ & = & w_n^2 - 3w_n \\ & = & w_n\left(w_n - 3\right) \end{array}$$

comme $w_n \geq 3$ *alors* $w_n > 0$ *et* $w_n - 3 \geq 0$ *donc* $w_n\left(w_n - 3\right) \geq 0$ *donc* $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$, $w_{n+1} - w_n \geq 0$. *Par conséquent la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**