www.etude-generale.com **1ère BAC S-EXP**
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Correction du devoir Surveillé N1

EXERCICE 1 .

1. *On considère la proposition* P *telle que :* $P : (\forall x \in \mathbb{R}), \ 2x^2 + 4x + 2 \neq 0.$

   On a $\overline{P} : (\exists x \in \mathbb{R}), \ \ 2x^2 + 4x + 2 = 0.$

   Déduisons la vérité de la proposition P :

   On a

   $$2x^2+4x+2 = 0 \iff 2\left(x^2 + 2x + 1\right) = 0 \iff 2\left(x+1\right)^2 = 0 \iff \left(x+1\right)^2 = 0 \iff x = -1$$

   donc l'équation $2x^2 + 4x + 2 = 0$ *admet unique solution dans* $\mathbb{R}$ *est* -1. *Ceci signifie que la proposition* $\overline{P}$ *est vraie, par conséquent* P *est fausse.*

2. *Montrons que :* $\forall (a, b) \in (]0, +\infty[)^2, \ \ \dfrac{a^2}{a+b} \geq \dfrac{3a-b}{4}$

   Soit $(a, b) \in (]0, +\infty[)^2$, *on a*

   $$\begin{aligned}
   \frac{a^2}{a+b} &\geq \frac{3a-b}{4} \\
   &\iff \frac{a^2}{a+b} - \frac{3a-b}{4} \geq 0 \\
   &\iff \frac{4a^2 - (3a-b)(a+b)}{4(a+b)} \geq 0 \\
   &\iff \frac{4a^2 - (3a^2 + 3ab - ba - b^2)}{4(a+b)} \geq 0 \\
   &\iff \frac{4a^2 - 3a^2 - 2ab + b^2}{4(a+b)} \geq 0 \\
   &\iff \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4(a+b)} \geq 0 \\
   &\iff \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geq 0
   \end{aligned}$$

   et comme $\dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geq 0$ *est une proposition vraie donc*

   $$\forall (a, b) \in (]0, +\infty[)^2, \ \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}$$

3. *Montrons que :* $(\forall x \in [0,+\infty[)\,,\ \ \sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1 \iff x=1.$

   Soit $x \in [0,+\infty[\,,$ *on a*

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+2}-\sqrt{x} &= 1 \\
&\iff \sqrt{2x+2}=1+\sqrt{x} \\
&\iff 2x+2=1+2\sqrt{x}+x \\
&\iff x+1=2\sqrt{x} \\
&\iff (x+1)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2 \\
&\iff x^2+2x+1=4x \\
&\iff x^2-2x+1=0 \\
&\iff (x-1)^2=0 \\
&\iff x=1
\end{aligned}$$

   donc

$$\forall x \in [0,+\infty[\,, \sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1 \iff x=1$$

4. *Montrons que :* $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ -13x \neq 3y \implies -6x+4y \neq 7\,(x+y)\,.$

   Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*, par contraposée montrons que :* $-6x+4y=7\,(x+y) \implies -13x=3y.$

   On a

   $-6x+4y=7\,(x+y) \implies -6x+4y=7x+7y \implies -6x-7x=7y-4y \implies -13x=4y$

   donc : $-6x+4y=7\,(x+y) \implies -13x=3y$*. D'où par contraposée on déduit que*

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ -13x\neq 3y \implies -6x+4y\neq 7\,(x+y)$$

5. *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation suivante* (E) : $3-2\,|x-4|=2x+5.$

   Déterminons le tableau de signe de l'expression $x-4$:

   Soit $x\in\mathbb{R}$*, on a*

$$x-4=0 \iff x=4$$

   comme $a=1>0$ *donc*

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	

   ♣ Si $x\in\,]-\infty,4]$ *alors* $x-4\leq 0$ *c'est-à-dire* $|x-4|=-\,(x-4)$ *donc*

$$\begin{aligned}
(E) &\iff 3+2\,(x-4)=2x+5 \\
&\iff 3+2x-8=2x+5 \\
&\iff 2x-2x=5-3+8 \\
&\iff 0=10 \qquad (\textit{impossible})
\end{aligned}$$

   donc

$$S_1=\varnothing$$

♣ Si $x \in [4, +\infty[$ *alors* $x - 4 \geq 0$ *c'est-à-dire* $|x - 4| = (x - 4)$ *donc*

$$\begin{aligned}
(E) &\iff 3 - 2(x - 4) = 2x + 5 \\
&\iff 3 - 2x + 8 = 2x + 5 \\
&\iff -2x - 2x = 5 - 3 - 8 \\
&\iff -4x = -6 \\
&\iff x = \frac{3}{2} \notin [4, +\infty[
\end{aligned}$$

donc

$$S_2 = \varnothing$$

d'où on déduit que l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S = S_1 \cup S_2 = \varnothing$$

6. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 2^n \geq n + 1$

♣ *Pour* $n = 0$ *on a* $2^0 \geq 0 + 1$ *c'est-à-dire la proposition est vraie pour* $n = 0$.

♣ *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $2^n \geq n + 1$ *et on montre* $2^{n+1} \geq n + 2$
On a $2^n \geq n + 1$ *alors* $2^{n+1} \geq 2(n + 1)$ *et comme* $2(n + 1) \geq n + 2$ *donc* $2^{n+1} \geq n + 2$.

♣ *D'après le principe de récurrence*

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ 2^n \geq n + 1$$

EXERCICE 2 .

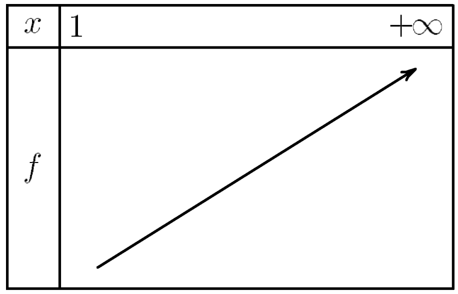
Soit f *et* g *deux fonctions définies par :* $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ *et* $g(x) = \sqrt{x + 1}$

1. *Dresser le T.V des fonctions* f *et* g *:*

♣ *On a* $a = -1$, $b = 2$ *et* $c = 1$
$\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2 \times (-1)} = 1$ *et* $f(1) = 2$ *et comme* $a = -1 < 0$ *donc*

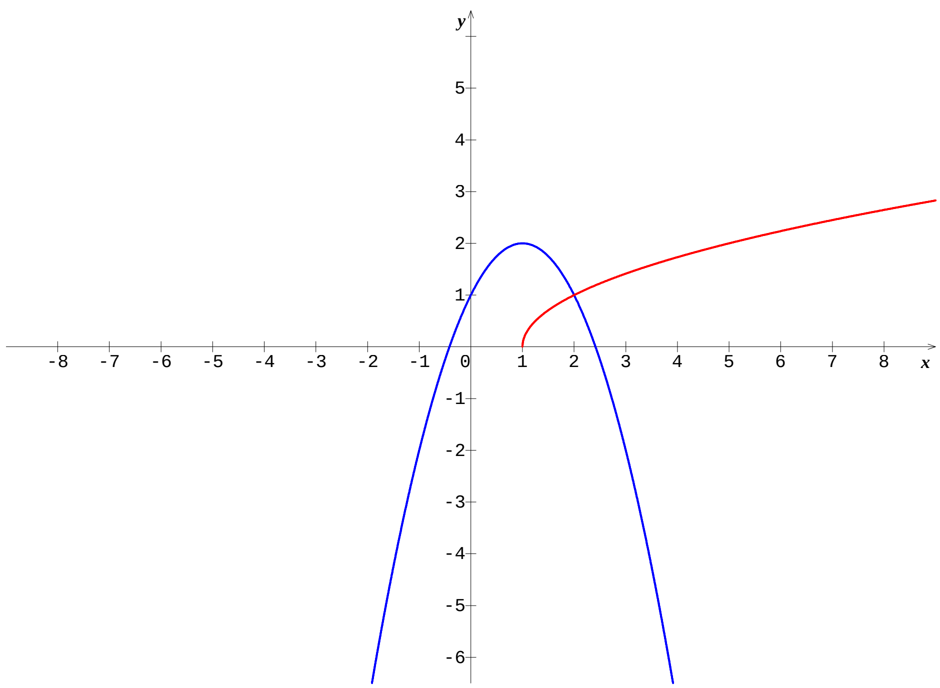
x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↗	2	↘	

♣ *On a* $D_g = [1, +\infty[$. *La fonction* g *est strictement croissante sur* $[1, +\infty[$.



2. *Représentons les courbe* (C_f) *et* (C_g) :

   La courbe (C_f) *est une parabole de sommet* $S(1, 2)$ *et d'axe de symétrie la droite d'équation* $x = 1$.



3. *Graphiquement on déduite*

$$f([1, 2]) = [0, 1] \quad et \quad f([2, +\infty[) = [1, +\infty[$$

4. *Résolvons l'inéquation* : $f(x) \geq g(x)$

   Graphiquement la courbe (C_f) *est au-dessus de la courbe* (C_g) *sur l'intervalle* $[2, +\infty[$, *donc*

$$S = [2, +\infty[$$

5. *Soit* h *la fonction définie par :* $h(x) = -x + 2 + 2\sqrt{x - 1}$.

a) *Vérifions que :* $D_h = [-1, +\infty[$

On a $D_h = \{x \in \mathbb{R}/\ x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}/\ x \geq 1\} = [1, +\infty[\,.$

b) *Vérifions que :* $(\forall x \in [1, +\infty[)\,,\ h(x) = 2 - \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2$

Soit $x \in [1, +\infty[\,,$ *on a*

$$\begin{aligned} 2 - \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 &= 2 - \left(x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1\right) \\ &= 2 - x + 1 + 2\sqrt{x-1} - 1 \\ &= -x + 2 + 2\sqrt{x-1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in [1, +\infty[)\,, h(x) = 2 - \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2$$

c) *Déduisons que* h *est majorée par* 2 *sur* $[1, +\infty[$ *:*

Soit $x \in [1, +\infty[\,,$ *on a*

$$h(x) \leq 2 \iff 2 - \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 \leq 2 \iff -\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 \leq 0$$

et comme $-\left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2 \leq 0$ *est une proposition vraie, donc*

$$(\forall x \in [1, +\infty[)\,,\ h(x) \leq 2$$

d'où la fonction h *est majorée par* 2 *sur* $[1, +\infty[\,.$

♣ *Déduisons le maximum de* h *sur* $[1, +\infty[$ *:*

Résolvons dans $[1, +\infty[$ *l'équation* $h(x) = 2$ *:*

Soit $x \in [1, +\infty[\,,$ *on a*

$$\begin{aligned} h(x) \quad = \quad 2 &\iff 2 - \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 = 2 \\ &\iff -\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 = 0 \\ &\iff \sqrt{x-1} - 1 = 0 \\ &\iff x - 1 = 1 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in [-1, +\infty[)\,,\ h(x) \leq h(2)$$

donc 2 *est la valeur maximale de la fonction* h *atteinte en* $x_0 = 2$*.*

d) *Montrons que :* $(\forall x \in [1, +\infty[)\,,\ h(x) = (g \circ f)(x)$

Soit $x \in [1, +\infty[\,,$ *on a*

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= -\left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 2\sqrt{x-1} + 1 \\ &= -(x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1 \\ &= -x + 1 + 2\sqrt{x+1} + 1 \\ &= -x + 2 + 2\sqrt{x+1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in [1,+\infty[)\,,\ h(x) = (g\circ f)(x)$$

Déduisons la monotonie de h sur $[1,2]$ et sur $[2,+\infty[$:

$$\text{On a } \begin{cases} \text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } [-1,0] \\ \\ f([1,2]) = [0,1] \\ \\ \text{la fonction } g \text{ est strictement croissante sur } [0,1] \end{cases}$$

donc la fonction h est strictement croissante sur $[1,2]$.

$$\text{On a } \begin{cases} \text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } [2,+\infty[\\ \\ f([2,+\infty[) = [1,+\infty[\\ \\ \text{la fonction } g \text{ est strictement décroissante sur } [1,+\infty[\end{cases}$$

donc la fonction h est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$.

e) *Le tableau de variation de la fonction h sur $[1,+\infty[$:*

x	1		2		$+\infty$
h			2		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	1				

f) *Montrons que : $(\forall x \in [1,2])\,,\ 1 \leq h(x) \leq 2$*

La fonction h est strictement croissante sur $[1,2]$ donc $h(1) \leq h(x) \leq h(2)$ et comme $h(1) = 1$ et $h(2) = 2$ d'où

$$(\forall x \in [1,2])\,,\ 1 \leq h(x) \leq 2$$

EXERCICE 3 .

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$.

1. *Déterminons D_f :*

   On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$.

   Montrons que f est impaire.

   On a : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\ -x \in \mathbb{R}^*$

   Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f(-x) = -x - \dfrac{9}{x} = -\left(x + \dfrac{9}{x}\right) = -f(x)$. Donc la fonction f est impaire.

2. *Montrons que : $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = \dfrac{xy - 9}{xy}$*

Soit x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{x+\dfrac{9}{x}-\left(y+\dfrac{9}{y}\right)}{x-y} \\
&= \frac{x-y+\dfrac{9}{x}-\dfrac{9}{y}}{x-y} \\
&= \frac{\dfrac{xy(x-y)}{xy}+\dfrac{9y-9x}{xy}}{x-y} \\
&= \frac{\dfrac{xy(x-y)+9y-9x}{xy}}{x-y} \\
&= \frac{xy(x-y)-9(x-y)}{xy(x-y)} \\
&= \frac{(x-y)(xy-9)}{xy(x-y)} \\
&= \frac{xy-9}{xy}
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{xy-9}{xy} \quad \text{où } x,y\in\mathbb{R}^* \text{ et } x\neq y$$

3. *Étudions la monotonie de f sur $]0,3]$ et $[3,+\infty[$:*

♣ *Soit x et y deux éléments $]0,3]$ tels que $x\neq y$*
On a $0<x\leq 3$ et $0<y\leq 3$ alors $0<xy\leq 9$ et comme $x\neq y$ alors $0<xy<9$ donc $-9<xy-9<0$ et comme $xy>0$ donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0 \quad \text{où } x,y\in\,]0,3] \text{ et } x\neq y$$

d'où la fonction f est strictement décroissante sur $]0,3]$.

♣ *Soit x et y deux éléments $[3,+\infty[$ tels que $x\neq y$*
On a $x\geq 3$ et $y\geq 3$ alors $xy\geq 9$ et comme $x\neq y$ alors $xy>9$ donc $xy-9>0$ et comme $xy>0$ donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}>0 \quad \text{où } x,y\in\,]0,3] \text{ et } x\neq y$$

d'où la fonction f est strictement croissante sur $[3,+\infty[$.

4. Dresser le T.V de la fonction f :

On a la fonction f est strictement décroissante sur $]0,3]$ et strictement croissante sur $[3,+\infty[$ et comme elle est impaire alors la fonction f est strictement décroissante sur $[-3,0[$ et strictement croissante sur $]-\infty,-9]$.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
f		$\nearrow$	-6	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	6	$\nearrow$	

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com