Devoir Surveillé N3

Durée 1H

EXERCICE 1 (9 *points*)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 3 \\ u_0 = 4 \end{cases}$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n < 5.$ $(1,5\ pts)$
2. *Vérifier que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{5}(5 - u_n)$ *, puis déduire la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $(2\ pts)$
3. *Déduire que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.* $(1\ pt)$
4. *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique telle que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n = 5 - u_n$

   a) *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique et exprimer* v_n *en fonction de* n. $(1,5\ pts)$

   b) *Déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n = 5 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ *, puis déterminer :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$. $(1,5\ pts)$

   c) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*,on pose :* $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$, *considérons la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :* $w_n = \dfrac{3S_n}{5}$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} w_n = 1$. $(1,5\ pts)$

EXERCICE 2 (10 *points*)

Soit f *la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$.

1. *Calculer* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$. $(1\ pt)$
2. *Justifier la dérivabilité de la fonction* f *sur* $]0,+\infty[$, *puis montrer que pour tout* $x \in]0,+\infty[$ *on a* $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$ $(1,5\ pts)$
3. *Déduire la monotonie de la fonction* f *sur* $[2,3]$, *puis montrer que :* $f([2,3]) \subset [2,3]$. $(2\ pts)$
4. *Montrer que :* $(\forall x \in [2,3]),\quad f(x) \leq x.$ $(1\ pt)$
5. *On considére la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 3 \end{cases}$

a) *Montrer que* : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \ 2 \leq u_n \leq 3$. (1 *pt*)

b) *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.* (2 *pts*)

c) *Calculer* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$. (1, 5 *pts*)

+1 pour la bonne présentation de la copie

FIN

Pr : Yahya MATIOUI