**Professeur : Yahya MATIOUI**

# Correction du devoir Maison N9

**Exercice 1** .

*On considère dans* $\mathbb{R}$ *l'équation suivante :* $(E) : \tan x - \sin x = 1 - \tan x . \sin x$

1. *L'équation* $(E)$ *existe si et seulement si* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$, *donc*
$$D = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. *On résout dans* $D$ *l'équation* $(E)$ :
*Soit* $x \in D$, *on a*
$$\begin{array}{rcl} (E) & \Longleftrightarrow & \tan x - \sin x + \tan x . \sin x - 1 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \tan x (1 + \sin x) - (1 + \sin x) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (1 + \sin x)(\tan x - 1) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & 1 + \sin x = 0 \quad ou \quad \tan x - 1 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \sin x = -1 \quad ou \quad \tan x = 1 \\ & \Longleftrightarrow & x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \notin D \quad ou \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad / \ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$
*donc l'ensemble des solutions de l'équation* $(E)$ *est*
$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Exercice 2** .

*Résolvons dans* $\left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ *l'équation :* $(E) : 2\cos^3 x - \cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$

*Soit* $x \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.
$$\begin{array}{rcl} (E) & \Longleftrightarrow & 2\cos x \left( \cos^2 x - 1 \right) - \left( \cos^2 x - 1 \right) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \left( \cos^2 x - 1 \right)(2\cos x - 1) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \cos^2 x - 1 = 0 \quad ou \quad 2\cos x - 1 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \cos x = 1 \quad ou \quad \cos x = -1 \quad ou \quad \cos x = \frac{1}{2} \\ & \Longleftrightarrow & x = 2k\pi \quad ou \ x = \pi + 2k\pi \quad ou \ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad ou \ x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \end{array}$$

*comme* $x \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ *alors* $x = 0$ *ou* $x = \frac{\pi}{3}$ *ou* $x = \frac{-\pi}{3}$.

*Donc l'ensemble des solutions de l'équation* $(E)$ *dans* $\left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ *est*
$$S = \left\{ -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3} \right\}$$

**Exercice 3** .

*Résolvons dans* $[0,\pi]$ *l'inéquation* $(I) : \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. *Soit* $x \in [0,\pi]$. *On pose :* $X = 2x - \frac{\pi}{3}$, *donc*

$$0 \leq 2x \leq 2\pi \iff -\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3} \iff -\frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{5\pi}{3} \iff X \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$$

*On résout dans l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ *l'inéquation* $(I') : \sin X \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

*On commence par résoudre l'équation* $(E) : \sin X = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *dans* $\left[\frac{-\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

$$(E) \iff \sin X = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff \left\{\begin{array}{c} X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ X = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z} \iff \left\{\begin{array}{c} X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ X = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z}$$

*Comme* $X \in \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ *alors*

- $$-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{3} \iff \frac{-1}{3} \leq \frac{1}{3} + 2k \leq \frac{5}{3} \iff -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3}$$

  *et comme* $k \in \mathbb{Z}$ *alors :* $k = 0$. *Donc :* $X = \frac{\pi}{3}$.

- $$-\frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{3} \iff \frac{-1}{3} \leq \frac{2}{3} + 2k \leq \frac{5}{3} \iff -1 \leq 2k \leq 1 \iff -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

  *et comme* $k \in \mathbb{Z}$ *alors :* $k = 0$. *Donc :* $X = \frac{2\pi}{3}$.

*donc*

$$\left\{\begin{array}{l} \sin X = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ X \in \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] \end{array}\right. \iff X = \frac{\pi}{3} \quad ou \quad X = \frac{2\pi}{3}$$

*On construit le cercle trigonométrique et la droite d'équation* $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, *donc*

$$\left\{\begin{array}{l} \sin X \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ X \in \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] \end{array}\right. \iff X \in \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$$

*Puisque* $X = 2x - \dfrac{\pi}{3}$, *d'où*

$$\begin{aligned}
\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \ \epsilon \ \left[\frac{-\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right] &\iff \left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{-\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right] \quad ou \quad \left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right] \\
&\iff \frac{-\pi}{3} \leq 2x-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} \quad ou \quad \frac{2\pi}{3} \leq 2x-\frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3} \\
&\iff 0 \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} \quad ou \quad \pi \leq 2x \leq 2\pi \\
&\iff 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \quad ou \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\
&\iff x \in \left[0,\frac{\pi}{3}\right] \quad ou \ x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right] \\
&\iff x \in \left[0,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]
\end{aligned}$$

*Ceci signifie que l'ensemble des solutions de l'inéquation* $(I)$ *est :*

$$S = \left[0,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$$

**Exercice 4** .

*On considère dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $(E)$ : $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x} = (\cos x - \sin x)^2$ .

1. *On cherche* $D$ *l'ensemble de définition de* $(E)$ .

   *On a*

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad et \ 1+\tan x \neq 0 \ / \ k \in \mathbb{Z} \ \right\}$$

   *et comme* $1+\tan x = 0$ *équivaut à* $\tan x = \tan\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)$ *équivaut à* $x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \quad /$ $k \in \mathbb{Z}$ *donc*

$$\begin{aligned}
D &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad et \ x \neq \frac{-\pi}{4} + k\pi \ /k \in \mathbb{Z} \right\} \\
&= \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \ \frac{-\pi}{4} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}
\end{aligned}$$

2. *Montrons que :* $(E) \iff \dfrac{1-\tan x}{1+\tan x} = \dfrac{(1-\tan x)^2}{1+\tan^2 x}$

   *Soit* $x \in D$, *on a*

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\iff \quad \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \left(\cos x\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)\right)^2 \\
&\iff \quad \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = (\cos x\,(1-\tan x))^2 \\
&\iff \quad \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \cos^2 x\,(1-\tan x)^2 \\
&\iff \quad \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \frac{(1-\tan x)^2}{1+\tan^2 x} \quad / \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}
\end{aligned}$$

*donc on obtient*

$$(E) \iff \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \frac{(1-\tan x)^2}{1+\tan^2 x}$$

3. *Résolvons dans D l'équation* $(E)$.

   *Soit* $x \in D$

$$\begin{aligned}
(E) &\iff \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \frac{(1-\tan x)^2}{1+\tan^2 x} \\
&\iff \frac{1-\tan x}{1+\tan x} - \frac{(1-\tan x)^2}{1+\tan^2 x} = 0 \\
&\iff \frac{(1-\tan x)(1+\tan^2 x) - (1-\tan x)^2 (1+\tan x)}{(1+\tan x)(1+\tan^2 x)} = 0 \\
&\iff (1-\tan x)\left(1+\tan^2 x\right) - (1-\tan x)^2 (1+\tan x) = 0 \\
&\iff (1-\tan x)\left[\left(1+\tan^2 x\right) - (1-\tan x)(1+\tan x)\right] = 0 \\
&\iff 2\tan^2 x\,(1-\tan x) = 0 \\
&\iff 2\tan^2 x = 0 \quad ou \quad \tan x = 1 \\
&\iff \tan x = 0 \quad ou \quad \tan x = 1 \\
&\iff x = k\pi \quad ou \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad / \ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

*donc l'ensemble des solutions de l'équation* $(E)$ *est*

$$S = \{k\pi \ \ / \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \ \frac{\pi}{4} + k\pi \ \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

**FIN**

Pr : **Yahya MATIOUI**

**www.etude – generale.com**