Correction du devoir surveillé N◦3

EXERCICE 1 .

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{5}u_n + 3 \\ \\ u_0 = 4 \end{cases}$

1. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n < 5$

   Pour $n = 0$*, on a* $u_0 = 4$ *donc* $u_0 < 5$*, d'où la proposition est vraie pour* $n = 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $u_n < 5$*, et montrons que* $u_{n+1} < 5$.

   On a $u_n < 5$ *alors* $\frac{2}{5}u_n < 2$ *donc* $\frac{2}{5}u_n + 3 < 5$ *d'où* $u_{n+1} < 5$.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n < 5$$

2. *Vérifions que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$

   Soit $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{5}u_n + 3 - u_n \\ &= \frac{2}{5}u_n - u_n + 3 \\ &= \frac{-3}{5}u_n + 3 \\ &= \frac{3}{5}(5 - u_n) \end{aligned}$$

   donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$$

   ♣ *Déduisons la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

   On a $u_n < 5$ *donc* $\frac{3}{5}(5 - u_n) > 0$ *d'où* $u_{n+1} - u_n > 0$. *Par conséquent, la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite est croissante.*

3. *Déduisons la convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

   puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante majorée par* 5 *alors elle est convergente.*

4. *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique telle que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $v_n = 5 - u_n$.

a) *Montrons que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique*

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 5 - u_{n+1} \\ &= 5 - \frac{2}{5}u_n - 3 \\ &= -\frac{2}{5}u_n + 2 \\ &= \frac{2}{5}(5 - u_n) \\ &= \frac{2}{5}v_n \end{aligned}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n.$$

D'où, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\frac{2}{5}$ *et premier terme* $v_0 = 1$.

♣ *On exprime* v_n *en fonction de* n :

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\frac{2}{5}$ *et premier terme* $v_0 = 1$. *On sait que pour tout entier naturel* n :

$$v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n v_0$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \; v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

b) *Déduisons que* : $(\forall n \in \mathbb{N}), \; u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$v_n = 5 - u_n \iff u_n = 5 - v_n \iff u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \; u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

Déterminons $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$:

Puisque $-1 < \frac{2}{5} < 1$ *donc* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$. *D'où*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 5.$$

c) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :* $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$, *considèrons la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
définie par : $w_n = \dfrac{3S_n}{5}$.
Montrons que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} w_n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{aligned}
w_n &= \frac{3S_n}{5} \\
&= \frac{3}{5} \times S_n \\
&= \frac{3}{5}\left(\underbrace{v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}}_{Somme\ d'une\ suite\ géométrique}\right) \\
&= \frac{3}{5}\left(v_0 \times \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}\right) \\
&= \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} \times \left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \\
&= 1-\left(\frac{2}{5}\right)^n
\end{aligned}$$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $w_n = 1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

puisque $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$. *D'où*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} w_n = 1.$$

EXERCICE 2 .

Soit f *la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$.

1. *Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$:

   On a $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ *donc par somme on obtient*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$$

2. *Justifions la dérivabilité de* f *sur* $]0,+\infty[$

   Les fonctions $u : x \longmapsto \dfrac{x}{2}$ *et* $v : x \longmapsto \dfrac{2}{x}$ *sont dérivables sur* $]0,+\infty[$ *donc la fonction*

$f = u + v$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, et on a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 4}{2x^2} \\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2} \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in]0,+\infty[)\,, \quad f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$$

3. *Déduisons la monotonie de f sur $[2,3]$.*

   Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-2)(x+2)$ sur $]0,+\infty[$ (car $(\forall x \in]0,+\infty[)\,,\ 2x^2 > 0)$.

   Donc

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$(x-2)(x+2)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f'(x)$					$-$		0	$+$	

   d'où $(\forall x \in [2,3])\,,\quad f'(x) \geq 0$ (f' s'annule en 2). Alors f est strictement croissante sur $[2,3]$.

   ♣ *Montrons que : $\ f([2,3]) \subset [2,3]$.*

   La fonction f est continue et strictement croissante sur $[2,3]$. Il en découle donc

$$f([2,3]) = [f(2)\,, f(3)] = \left[2, \frac{13}{6}\right]$$

   et comme $\left[2, \frac{13}{6}\right] \subset [2,3]$, d'où $\ f([2,3]) \subset [2,3]$.

4. *Montrons que : $(\forall x \in [2,3])\,,\quad f(x) \leq x$.*

   Soit $x \in [2,3]$, on a

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x}{2} + \frac{2}{x} - x \\ &= \frac{-x^2 + 4}{2x} \\ &= \frac{-(x^2 - 4)}{2x} \\ &= \frac{-(x-2)(x+2)}{2x} \end{aligned}$$

donc le signe de $f(x) - x$ *sur* $[2,3]$ *est le même que celui de* $-(x-2)(x+2)$. *Donc d'après la question* 3/ *on obtient*

$$(\forall x \in [2,3]), \quad f(x) - x \leq 0.$$

d'où $(\forall x \in [2,3]), \ f(x) \leq x$.

5. *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}), \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 3 \end{cases}$

a) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}), \ 2 \leq u_n \leq 3$.

Pour $n = 0$, *on a* $u_0 = 3$ *donc* $2 \leq u_0 \leq 3$. *D'où la proposition est vraie pour* $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $2 \leq u_n \leq 3$, *et on montre que* $2 \leq u_{n+1} \leq 3$.

On a

$$2 \leq u_n \leq 3 \underset{f \text{ est strict sur } [2,3]}{\Longrightarrow} f(2) \leq f(u_n) \leq f(3)$$

et comme $f(3) \leq 3$ (*car* $(\forall x \in [2,3]), \ f(x) \leq x$) *donc* $2 \leq u_{n+1} \leq 3$. *D'où*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ 2 \leq u_n \leq 3.$$

b) *Montrons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante*

On a $(\forall x \in [2,3]), \ f(x) \leq x$ *et comme* $u_n \in [2,3]$ *donc* $f(u_n) \leq u_n$ *d'où*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ u_{n+1} \leq u_n$$

c'est-à-dire la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante .*

♣ *Déduisons la convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante minorée par* 2 *alors elle est convergente.*

c) *Calculons* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$:

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n)$ *telle que* $u_0 \in [2,3]$.

On a f *est continue sur* $[2,3]$ *et* $f([2,3]) \subset [2,3]$ *et comme la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et sa limite* ℓ $\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell\right)$ *est une solution de l'équation* $f(x) = x$ *dans* $[2,3]$.

Soit $x \in [2,3]$, *on a*

$$f(x) = x \iff \frac{x^2+4}{2x} = x \iff x^2+4 = 2x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = 2 \quad ou \quad x = -2$$

et comme $x \in [2,3]$ *alors* $\ell = 2$ *c'est-à-dire*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 2$$