

Correction devoir maison N2

PROBLEME 1 .

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité : 2cm).

1. • Calculons : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$:

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} = +\infty$ donc par somme on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = +\infty$$

• Calculons : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$:

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{5}{2} = -\infty$ donc par somme on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = -\infty$$

2)

a) Pour montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$, il suffit de montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) -$

$$\left(-x + \frac{5}{2}\right) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) + x - \frac{5}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) = 0.$$

D'où, la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

b) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation : $e^{x-2} - 4 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{x-2} - 4 = 0 \iff e^{x-2} = 4 \iff x - 2 = \ln 4 \iff x = 2 + \ln 4$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$S = \{2 + \ln 4\}$$

Évaluons le signe de : $f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) = \frac{1}{2}e^{x-2}(4 - e^{x-2})$$

comme $\frac{1}{2}e^{x-2} > 0$, et $4 - e^{x-2} = e^{\ln(4)} - e^{x-2}$ et la fonction $t \mapsto e^t$ est strictement croissante sur \mathbb{R} alors le signe de $f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right)$ sur \mathbb{R} est le même que celui de $\ln(4) - (x - 2)$.

Donc

x	$-\infty$	$2 + \ln(4)$	$+\infty$
$f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right)$	+	0	-

ceci signifie que :

- La courbe (C) est au-dessous de la droite (Δ) sur $]2 + \ln 4, +\infty[$.
- La courbe (C) est au-dessus de la droite (Δ) sur $]-\infty, 2 + \ln 4[$.
- $(C_f) \cap (\Delta) = \left\{ B \left(2 + \ln(4), 2 \ln 2 + \frac{9}{2} \right) \right\}$.

2. Montrons que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} - \frac{e^{x-2}(e^{x-2} - 4)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} - \frac{e^{x-2}}{x-2} \times \frac{x-2}{2x} \times (e^{x-2} - 4) \end{aligned}$$

on pose $X = x - 2$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-2}}{x-2} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{2x} = \frac{1}{2}$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-2} - 4) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} = -1$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3. a) Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$

Les fonction $u : x \mapsto -x + \frac{5}{2}$, $v : x \mapsto \frac{-1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$ sont dérivables sur \mathbb{R} donc la fonction $f = u + v$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)\right)' \\ &= -1 - \left(\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) + \frac{1}{2}e^{x-2} \times e^{x-2}\right) \\ &= -1 - \left(\frac{1}{2}e^{2x-4} - 2e^{x-2} + \frac{1}{2}e^{2x-4}\right) \\ &= -1 - e^{2x-4} + 2e^{x-2} \\ &= -((e^{x-2})^2 - 2e^{x-2} + 1) \\ &= -(e^{x-2} - 1)^2 \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$$

b) Le tableau de variations de la fonction f .

On a $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2 \leq 0$, et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \iff -(e^{x-2} - 1)^2 = 0 \\ &\iff e^{x-2} - 1 = 0 \\ &\iff e^{x-2} = 1 \\ &\iff x - 2 = 0 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

donc

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
f	$+\infty$	2	$-\infty$

4. Calculons $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

La fonction f' est dérivable sur \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'''(x) &= -(e^{x-2} - 1)^2)' \\ &= -2(e^{x-2} - 1) \times e^{x-2} \\ &= 2e^{x-2}(1 - e^{x-2}) \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f''(x) = 2e^{x-2}(1 - e^{x-2})$$

5. ♣ Montrons que $A(2, 2)$ est un point d'inflexion de (C) .

Comme $2e^{x-2} > 0$ pour tout x dans \mathbb{R} , et $1 - e^{x-2} = e^0 - e^{x-2}$ et la fonction $t \mapsto e^t$ est strictement croissante sur \mathbb{R} alors le signe de $f''(x)$ sur \mathbb{R} est le même que celui de $0 - (x - 2) = 2 - x$, donc

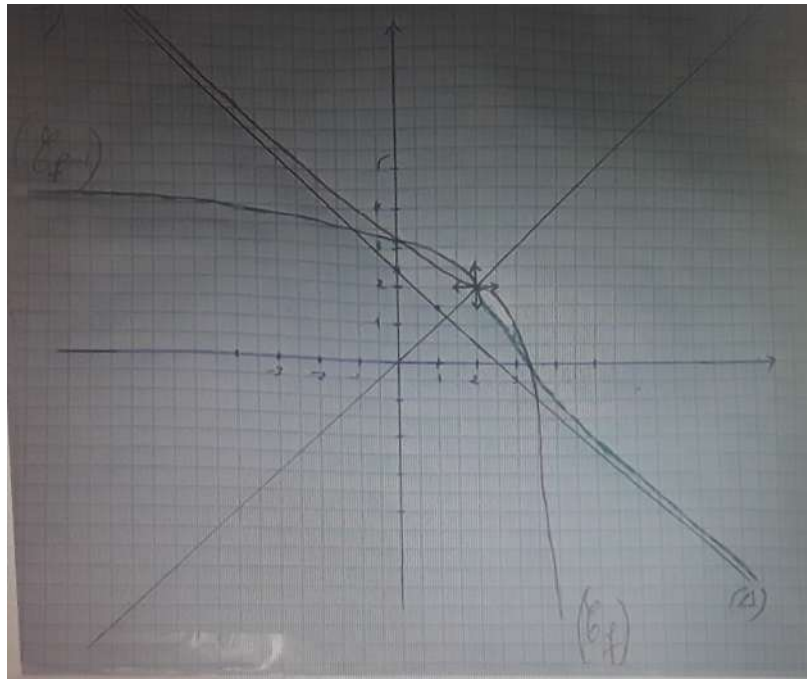
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Convexité de (C)	(C) convexe		(C) concave

Puisque f'' s'annule en changeant de signe en $x = 2$ et comme $f(2) = 2$, alors le point $A(2, 2)$ est un point d'inflexion de la courbe (C) .

6. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet unique solution α telle que : $\alpha \in]2 + \ln 3, 2 + \ln 4[$

- La fonction f est continue sur \mathbb{R} (car elle est dérivable sur \mathbb{R}), en particulier elle est continue sur $[2 + \ln 3, 2 + \ln 4]$.
- La fonction f est strictement décroissante sur $[2 + \ln 3, 2 + \ln 4]$.
- On a : $f(2 + \ln 3) = 2 - \ln(3) \approx 0,90 > 0$ et $f(2 + \ln 4) = \frac{1}{2} - \ln(4) \approx -0,88 < 0$ donc $f(2 + \ln 3) \times f(2 + \ln 4) < 0$.

donc d'après le T.V.I l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$



7. a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur \mathbb{R} , alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J telle que : $J = f(I) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b) Voir la courbe.

c) Calculons : $(f^{-1})'(2 - \ln 3)$.

On a : $f(2 + \ln 3) = 2 - \ln 3$ et comme f est dérivable en $2 + \ln 3$ et $f'(2 + \ln 3) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $2 - \ln 3$ et on a :

$$(f^{-1})'(2 - \ln 3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2 - \ln 3))} = \frac{1}{f'(2 + \ln 3)} = \frac{-1}{4}$$

EXERCICE 2 .

1. Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

a) Vérifions que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

On a : $a = 1$, $b = -2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ et $c = 16$, donc

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= \left[-2(\sqrt{2} + \sqrt{6})\right]^2 - 64 \\ &= 4(2 + 2\sqrt{12} + 6) - 64 \\ &= 32 + 8\sqrt{12} - 64 \\ &= -32 + 8\sqrt{12} \\ &= -4(6 - 2\sqrt{12} + 2) \\ &= -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

b) Déduisons les solutions de l'équation (E) :

L'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées z_1 et z_2 telles que :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ &= \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i\sqrt{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}}{2} \\ &= \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + 2i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2} \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

et : $z_2 = \bar{z}_1 = \overline{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) - i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$. Donc

$$S = \left\{ (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}), (\sqrt{2} + \sqrt{6}) - i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \right\}$$

2. Soient les nombres complexes $a = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

a) Vérifions que : $b\bar{c} = a$, puis déduire que $ac = 4b$

On a

$$\begin{aligned} b\bar{c} &= (1 + i\sqrt{3}) \overline{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})} \\ &= (1 + i\sqrt{3}) (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} + \sqrt{6} \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \\ &= a \end{aligned}$$

alors $b\bar{c} = a$ donc $b\bar{c}.c = ac$, et comme $c\bar{c} = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 4$, alors on obtient :

$$ac = 4b$$

D'où $b\bar{c} = a$ et $ac = 4b$.

b) L'écriture trigonométrique des nombres complexes : b et c .

On a $|b| = |c| = 2$ donc

$$b = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

et

$$c = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

donc

$$b = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{et} \quad c = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

c) Dédouisons que : $a = 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$.

On a : $|a| = |b\bar{c}| = |b| |\bar{c}| = 2 \times 2 = 4$, et

$$\begin{aligned} \arg(a) &\equiv \arg(b\bar{c}) [2\pi] \\ &\equiv \arg(\bar{c}) + \arg(b) [2\pi] \end{aligned}$$

et comme $\arg(\bar{c}) \equiv -\arg(c) [2\pi]$, alors $\arg(\bar{c}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$, donc

$$\begin{aligned} \arg(a) &\equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad / \quad \arg(b) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{12} [2\pi] \end{aligned}$$

d'où

$$a = 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) ; on considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d = a^4$. Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

a) Vérifions que : $z' = \frac{1}{4}az$

On a

$$R(M) = M' \iff z' - z_o = e^{i\frac{\pi}{12}}(z - z_o) \iff z' = \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) z = \frac{a}{4}z$$

donc

$$z' = \frac{a}{4}z$$

b) On cherche l'image du point C par la rotation R

On a d'après l'expression complexe de la rotation R :

$$\frac{a}{4}c = \frac{ac}{4} = b$$

donc l'image du point C par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$ est le point B .

c) La nature du triangle OBC .

On a

$$R(C) = B \iff \left\{ \begin{array}{l} OB = OC \\ \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} \right) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi] \end{array} \right.$$

Donc, le triangle OBC est isocèle en O .

d) Montrons que : $a^4 = 128b$

On a : $a = 4 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$, et d'après la formule de Moivre, on a :

$$\begin{aligned} a^4 &= 4^4 \cdot \left(\cos \left(4 \times \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(4 \times \frac{\pi}{12} \right) \right) \\ &= 256 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \frac{256}{2} (1 + i\sqrt{3}) \\ &= 128b \end{aligned}$$

donc

$$a^4 = 128b$$

Déduisons que les points O , B et D sont alignés :

On a :

$$\frac{d - z_o}{b - z_o} = \frac{d}{b} = \frac{a^4}{b} = \frac{128b}{b} = 128 \in \mathbb{R}$$

donc, les points O , B et D sont alignés.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com