Correction du Devoir Maison N1

EXERCICE 1 .

♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty} 2x-1-\sqrt{4x^2+3x-2} &= \lim_{x\longrightarrow-\infty} 2x-1+\sqrt{x^2\left(4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} 2x-1+|x|\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} 2x-1-x\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}} \quad / \quad |x|=-x \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} x\left(2-\frac{1}{x}-\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} x\times\frac{\left(2-\frac{1}{x}-\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)\left(2-\frac{1}{x}+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)}{2-\frac{1}{x}+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x\times\left[\left(2-\frac{1}{x}\right)^2-\left(4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)\right]}{2-\frac{1}{x}+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x\left(\frac{-7}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{2-\frac{1}{x}+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{-7+\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}}
\end{aligned}$$

1. *et comme* $\lim_{x\longrightarrow-\infty} 2-\frac{1}{x}+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}=4$ *et* $\lim_{x\longrightarrow-\infty} -7+\frac{3}{x}=-7$ *donc* $\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{-7+\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}+\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}}=$ $-\frac{7}{4}$ *d'où*

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} 2x-1-\sqrt{4x^2+3x-2}=-\frac{7}{4}$$

♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow -\infty} x\sqrt{\frac{x}{x-1}}-x-1 &= \lim_{x\longrightarrow -\infty} x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1\right)-1\\
&= \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x\left(\dfrac{x}{x-1}-1\right)}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1}-1\\
&= \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x\times\dfrac{1}{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1}-1
\end{aligned}$$

et comme $\lim_{x\longrightarrow -\infty}\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1=2$ *et* $\lim_{x\longrightarrow -\infty} x\times\frac{1}{x-1}=1$ *donc* $\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x\times\frac{1}{x-1}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1}-1=\frac{-1}{2}$ *d'où*

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} x\sqrt{\frac{x}{x-1}}-x-1=\frac{-1}{2}$$

♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2x-3}{3\sqrt{x+1}-5} &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{(2x-3)\left(3\sqrt{x+1}+5\right)}{\left(3\sqrt{x+1}-5\right)\left(3\sqrt{x+1}+5\right)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{(2x-3)\left(3\sqrt{x+1}+5\right)}{9(x+1)-25}\\
&= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{(2x-3)\left(3\sqrt{x+1}+5\right)}{9x-16}\\
&= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2x-3}{9x-16}\times\left(3\sqrt{x+1}+5\right)
\end{aligned}$$

et comme $\lim_{x\longrightarrow +\infty}3\sqrt{x+1}+5=+\infty$ *et* $\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2x-3}{9x-16}=\frac{2}{9}$ *donc* $\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2x-3}{9x-16}\times\left(3\sqrt{x+1}+5\right)=+\infty$ *d'où*

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2x-3}{3\sqrt{x+1}-5}=+\infty$$

♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x} &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt[3]{x\left(x+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt[3]{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x+\frac{1}{x}}-1\right)
\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt[3]{x+\dfrac{1}{x}}-1=+\infty$ *donc*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x}=+\infty$$

2) *Simplifions le nombre* $A=\dfrac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[5]{9^3}}{\sqrt[5]{3}}$

On a

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[5]{9^3}}{\sqrt[5]{3}}\\
&= \sqrt[5\times3]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[5]{\frac{9^3}{3}}\\
&= \sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[5]{3^5}\\
&= \sqrt[3]{27}\times 3\\
&= \sqrt[3]{3^3}\times 3\\
&= 3\times 3\\
&= 9
\end{aligned}$$

3) *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *les équations* (E_1) ,(E_2) *et* (E_3) :

♠ *Soit* $x\in\mathbb{R}$, *on a*

$$x^4=12 \iff x=\sqrt[4]{12} \text{ ou } x=-\sqrt[4]{12}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) *est*

$$S=\left\{\sqrt[4]{12},-\sqrt[4]{12}\right\}$$

♠ *L'équation* (E_2) *est définie sur* $\left[\dfrac{-1}{2},+\infty\right[$.

Soit $x\in\left[\dfrac{-1}{2},+\infty\right[$, *on a*

$$\begin{aligned}
(E_2) &\iff 2x+1=16^3\\
&\iff 2x=16^3-1\\
&\iff x=\frac{16^3-1}{2}\\
&\iff x=\frac{4095}{2}
\end{aligned}$$

et comme $\dfrac{4095}{2}\in\left[\dfrac{-1}{2},+\infty\right[$ *donc*

$$S=\left\{\frac{4095}{2}\right\}$$

♠ *L'équation* (E_3) *est définie sur* $[0,+\infty[$.
Soit $x \in [0,+\infty[$, *on pose* $X = \sqrt[3]{x}$ *c'est-à-dire* $x = X^3$
on a

$$\begin{aligned} X^3 + X &= 2 \iff X^3 + X - 2 = 0 \\ &\iff X^3 - 1 + X - 1 = 0 \\ &\iff (X-1)\left(X^2 + X + 1\right) + (X-1) = 0 \\ &\iff (X-1)\left(X^2 + X + 2\right) = 0 \\ &\iff X = 1 \quad ou \quad X^2 + X + 2 = 0 \end{aligned}$$

puisque le discriminant du trinôme X^2+X+2 *est* -3 *alors* $X^2+X+2 \neq 0$ *donc*

$$\begin{aligned} (E_3) &\iff \sqrt[3]{x} = 1 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

d'où l'ensemble de solution de l'équation (E_3) *est*

$$S = \{1\}$$

EXERCICE 2 .

On considére la fonction f *définie par :* $f(x) = 2\sqrt{x} - x$

1. *La fonction* f *est définie sur* $[0,+\infty[$.

♣ *Déterminons le tableau de variation de* f.
La fonction $u : x \longmapsto \sqrt{x}$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *donc la fonction* $v = -2u$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et comme la fonction* $w : x \longmapsto -x$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *donc la fonction* $f = v + w$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$, *et pour tout* $x \in]0,+\infty[$ *on a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2\sqrt{x} - x\right)' \\ &= 2\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \\ &= \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in]0,+\infty[)\,, \quad f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}$$

Le signe de $f'(x)$ *sur* $]0,+\infty[$ *est celui de* $1-x$ *(car* $(\forall x \in]0,+\infty[)$, $\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})>0$*)*
donc

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$1-x$			$+$	0	$-$	
$f'(x)$	//////	‖	$+$	0	$-$	

d'où

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2. *Montrons que l'équation* $f(x)=0$ *admet une unique solution* α *dans* $]3,5[$.

- *La fonction* f *est continue et strictement décroissante sur* $[3,5]$.
- *On a* $f(3)=2\sqrt{3}-3$ *et* $f(5)=2\sqrt{5}-5$*, donc* $f(3)\times f(5)<0$

  D'après le théorème des valeurs intermédiares, l'équation $f(x)=0$ *admet une unique solution dans* $]3,5[$. *C'est-à-dire qu'il existe un réel* α *de l'intervalle* $]3,5[$ *tel que* $f(\alpha)=0$.

- *Déduisons que :* $\alpha = \dfrac{\alpha^2}{4}$.

  On a

  $$f(\alpha)=0 \iff 2\sqrt{\alpha}-\alpha=0 \iff 2\sqrt{\alpha}=\alpha \iff \left(2\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha^2 \iff 4\alpha=\alpha^2 \iff \alpha=\frac{\alpha^2}{4}$$

  donc

  $$\alpha=\frac{\alpha^2}{4}$$

3. *Résolvons l'équation* $f(x)=0$.

   Soit $x\in[0,+\infty[$, *on a*

   $$f(x)=0 \iff 2\sqrt{x}=x \iff 4x=x^2 \iff x(4-x)=0 \iff x=0 \text{ ou } x=4$$

   et comme $0\in[0,+\infty[$ *et* $4\in[0,+\infty[$ *donc*

   $$S=\{0,4\}$$

4. *Soit* g *la restriction de* f *à l'intervalle* $I=[0,1]$.

   $$g(x)=f(x)=2\sqrt{x}-x \qquad ,x\in[0,1]$$

a) *Montrons que g admet une fonction réciproque définie sur J.*

La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ alors elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle $J = g(I)$.

On a

$$J = g(I) = g([0,1]) = [g(0), g(1)] = [0,1]$$

b) *Le tableau de variation de g^{-1} sur J.*

La fonction g^{-1} est strictemente croissante sur J. On a

x	0		1
g^{-1}			1
		$\nearrow$	
	0		

c) *Déterminons $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.*

Soit $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ avec $y = g^{-1}(x)$.

On a

1.

$$\begin{aligned}
y &= g^{-1}(x) \iff g(y) = x \\
&\iff 2\sqrt{y} - y = x \\
&\iff 2\sqrt{y} - y + 1 - 1 = x \\
&\iff -\left(-2\sqrt{y} + y + 1\right) + 1 = x \\
&\iff -\left(\sqrt{y}^2 - 2\sqrt{y} + 1\right) = x - 1 \\
&\iff -\left(\sqrt{y} - 1\right)^2 = x - 1 \\
&\iff \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 = 1 - x \\
&\iff |\sqrt{y} - 1| = \sqrt{1-x} \\
&\iff -\left(\sqrt{y} - 1\right) = \sqrt{1-x} \\
&\iff \sqrt{y} - 1 = -\sqrt{1-x} \\
&\iff \sqrt{y} = 1 - \sqrt{1-x} \\
&\iff \sqrt{y}^2 = \left(1 - \sqrt{1-x}\right)^2 \\
&\iff y = \left(1 - \sqrt{1-x}\right)^2
\end{aligned}$$

donc

$$\forall x \in [0,1], \quad g^{-1}(x) = \left(1 - \sqrt{1-x}\right)^2$$

EXERCICE 3 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$

1. *Montrons que f est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{2n}{n+1}\right]$.*

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la restriction d'une fonction polynôme.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= (n+1)x^n - 2nx^{n-1} \\ &= x^{n-1}((n+1)x - 2n) \\ &= x^{n-1}(n+1)\left(x - \frac{2n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

   Si $0 \leq x \leq \dfrac{2n}{n+1}$ alors $x - \dfrac{2n}{n+1} \leq 0$ et $x^{n-1} > 0$ donc $\left(\forall x \in \left[0, \dfrac{2n}{n+1}\right]\right)$, $f'(x) \leq 0$ $\left(f\text{' s'annule uniquement en } \dfrac{2n}{n+1}\right)$. Alors f est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{2n}{n+1}\right]$.

2. *On déduit que : $f\left(\dfrac{2n}{n+1}\right) < 0$.*

   La fonction f est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{2n}{n+1}\right]$, et comme $1 < \dfrac{2n}{n+1}$ alors $f\left(\dfrac{2n}{n+1}\right) < f(1)$ et comme $f(1) = 0$, donc

$$f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0.$$

3. *Montrons qu'il existe au moins $\alpha \in \left]\dfrac{2n}{n+1}, 2\right[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.*

   La fonction f est continue sur $\left[\dfrac{2n}{n+1}, 2\right]$.

   On a : $f\left(\dfrac{2n}{n+1}\right) < 0$ et $f(2) > 0$ donc $f\left(\dfrac{2n}{n+1}\right) \times f(2) < 0$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiares l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left]\dfrac{2n}{n+1}, 2\right[$. C'est-à-dire qu'il existe un réel α de l'intervalle $\left]\dfrac{2n}{n+1}, 2\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

4. *Vérifions que :* $\alpha^n = \dfrac{1}{2-\alpha}$.

On a

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha) & = & 0 \\ & \Longleftrightarrow & \alpha^{n+1} - 2\alpha^n + 1 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \alpha^n (\alpha - 2) = -1 \\ & \Longleftrightarrow & \alpha^n = \dfrac{1}{2-\alpha}. \end{array}$$

donc

$$\alpha^n = \frac{1}{2-\alpha}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com