www.etude-generale.com **1ère BAC S-EXP**
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Dérivation

Dérivabilité d'une fonction en un point

Nombre dérivé

Definition 1 .

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$. *Le nombre ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f en x_0. Il est noté $f'(x_0)$.*

Remarque 2 .

En posant $h=x-x_0$, et sous reserve d'existence, on a également $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$.

Exemple 3 .

Étudions la dérivabilité de la fonction $f:x\longmapsto 2x^2$ en $x_0=1$.

On a

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\longrightarrow 1}2(x+1)=4.$$

Donc la fonction f est dérivable en $x_0=1$ et on a $f'(1)=4$.

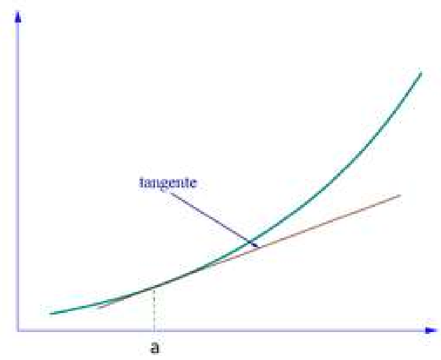
Tangente à la courbe d'une fonction en un point

Approche .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit $x_0\in I$. Notons M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et M le point de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x\in I$. Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ correspond au coefficient directeur de la droite (MM_0). Ainsi :

- ♣ Si f est dérivable en x_0, alors ce coefficient directeur tend vers $f'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0. Par ailleurs, la droite (MM_0) tend vers une position limite qui est la tangente à la courbe représentative de f au point x_0. Le nombre dérivé $f'(x_0)$

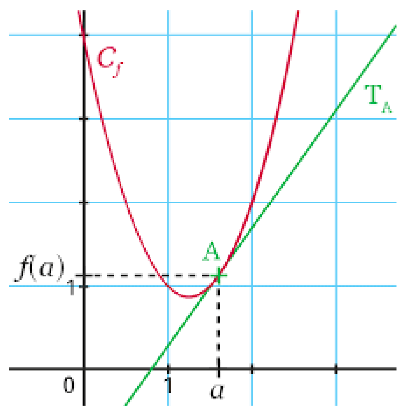
est alors le coefficient directeur de la tangente à la courbe f au point M_0.



Propriété 4 .

Soit f une fonction dérivable en un point x_0.

Une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f au point $A(x_0, f(x_0))$ est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

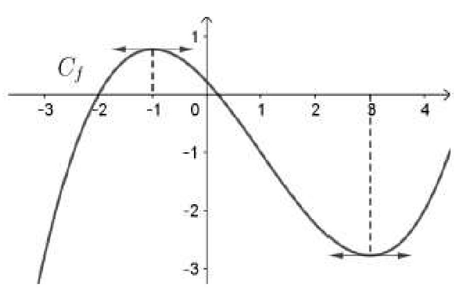


Exemple 5 *Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f : $x \longmapsto 2x^2$ au point $A(1, f(1))$.*

On a $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$ (d'après l'exemple précédent). Donc, une équation de la tangente (T) est : $y = 4(x-1) + 2$ c-à-d $(T) : y = 4x - 2$.

Remarque 6 .

♣ *La tangente en $A(a, f(a))$ est parallèle à (Ox) si et seulement si $f'(a) = 0$.*



Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

Définitions

Definition 7 .

♣ *Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0, x_0 + r[$ où $r \in]0, +\infty[$.*

On dit que f est dérivable à droite de x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$. *Le nombre ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en x_0. Il est noté $f'_d(x_0)$.*

♣ *Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0 - r, x_0]$ où $r \in]0, +\infty[$.*

On dit que f est dérivable à gauche de x_0 s'il existe un réel ℓ' tel que : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell'$. *Le nombre ℓ' est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en x_0. Il est noté $f'_g(x_0)$.*

Definition 8 .

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, \alpha[$ $(a < \alpha)$.

On dit que f est dérivable à droite en a, s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x > a}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$.

Le réel ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a, et on le note par $f'_d(a)$.

Et on écrit $f'_d(a) = \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x > a}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell;$

Exemple 9 .

Soit f une définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto |x^2 - 1|$.
Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0 = 1$.

♠ *La dérivabilité à droite en $x_0 = 1$:*

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1}$.

On a

$$x^2 - 1 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

pour tout $x \in]1, +\infty[$. $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} x + 1 = 2$.

D'où f est dérivable à droite en 1, et on a $f'_d(1) = 2$.

♠ *La dérivabilité à gauche en* $x_0 = 1$:

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{|x^2-1|}{x-1}$.

On a pour tout $x \in [0,1[$. $|x^2-1| = -(x^2-1)$ *donc* $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} -(x+1) = -2$.

D'où f *est dérivable à gauche en* 1, *et on a* $f'_g(1) = -2$.

Propriété 10 .

Soit f *une fonction définie sur un intervalle ouvert* I *et* x_0 *un élément de* I.

f *est dérivable en* x_0 *si et seulement si* f *est dérivable à droite en* x_0, f *est dérivable à gauche en* a *et* $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 11 .

Soit f *une définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f : x \longmapsto |x^2-1|$.

Étudier la dérivabilité de la fonction f *en* $x_0 = 1$.

La fonction f *est dérivable à droite et à gauche en* $x_0 = 1$, *et comme* $f'_d(1) = 2$ *et* $f'_g(1) = -2$ *alors* $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ *donc la fonction* f *n'est pas dérivable en* $x_0 = 1$.

Exemple 12 .

La fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = |x|$.

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$. *Donc la fonction* f *est dérivable à droite en* $x_0 = 0$ *et* $f'_d(0) = 1$.

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{-x}{x} = -1$. *Donc la fonction* f *est dérivable à gauche en* $x_0 = 0$ *et* $f'_g(0) = -1$.

Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, *donc* f *n'est pas dérivable en* 0.

Remarque 13 .

Si f *est dérivable en* x_0 *alors* $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Interprétation graphique du nombre dérivé à gauche et à droite (demi-tangente)

Propriété 14 .

♣ *Si* f *est dérivable à gauche en* x_0 *alors la courbe* (C_f) *admet une demi-tangente à gauche de* x_0 *de coefficient directeur* $f'_g(x_0)$ *et son équation réduite est :* $\begin{cases} y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$.

♣ *Si* f *est dérivable à droite en* x_0 *alors la courbe* (C_f) *admet une demi-tangente à droite de* x_0 *de coefficient directeur* $f'_d(x_0)$ *et son équation réduite est :* $\begin{cases} y = f'_d(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$.

Exemple 15 .

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = (x+3)^3 + 2 & si \quad x \geq -2 \\ \\ f(x) = -(x+3)^2 + 4 & si \quad x < -2 \end{cases}$

Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de en $x_0 = -2$, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

♣ *La dérivabilité à gauche en $x_0 = -2$:*

On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} &= \lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{-(x+3)^2 + 4 - 3}{x+2} \\ &= \lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{-(x+3)^2 + 1}{x+2} \\ &= \lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{-\left((x+3)^2 - 1\right)}{x+2} \\ &= \lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{-(x+2)(x+4)}{x+2} \\ &= \lim_{x \longrightarrow -2^-} -(x+4) = -2 \end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable à gauche en $x_0 = -1$ et $f'_g(-2) = -2$.

On peut interpréter ce résultat graphiquement comme suit :

La courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche au point $M(-2, 3)$ définie par (T_g) : $\begin{cases} y = -2x - 1 \\ \\ x \leq -2 \end{cases}$

♣ *La dérivabilité à droite en $x_0 = -2$:*

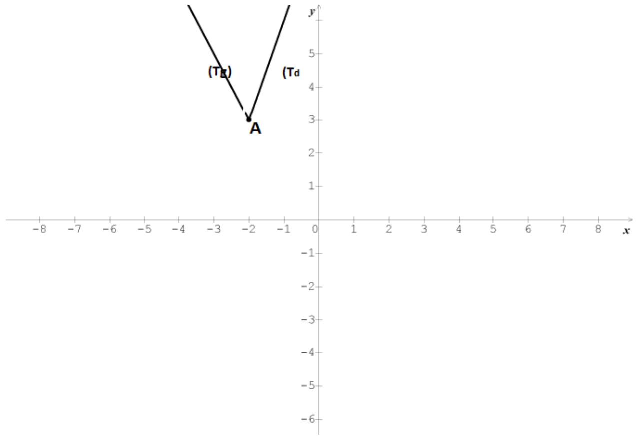
On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} &= \lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{(x+3)^3 + 2 - 3}{x+2} \\ &= \lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{(x+3)^3 - 1}{x+2} \\ &= \lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{(x+2)\left[(x+3)^2 + (x+3) + 1\right]}{x+2} \\ &= \lim_{x \longrightarrow -2^+} (x+3)^2 + (x+3) + 1 = 3 \end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable à droite en $x_0 = -2$ et $f'_d(-2) = 3$.

On peut interpréter ce résultat graphiquement comme suit :

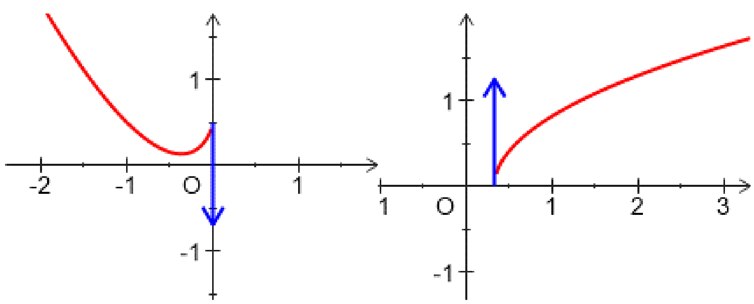
La courbe représentative de f admet une demi-tangente à droite au point $M(-2,3)$ définie par (T_d) : $\begin{cases} y = 3x+9 \\ \\ x \geq -2 \end{cases}$



Remarque 16 .

♣ Si f *n'est pas dérivable à droite* $\left(c.à.d. \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty \right)$ *dans ce cas on a demi tangente à droite de x_0 parallèle à l'axe des ordonnées.*

♣ Si f *n'est pas dérivable à gauche* $\left(c.à.d. \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty \right)$ *dans ce cas on a demi tangente à gauche de x_0 parallèle à l'axe des ordonnées.*



Remarque 17 .

Si f est dérivable à droite et à gauche de x_0 et $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ alors f n'est pas dérivable en x_0. On dit que $A(x_0, f(x_0))$ est un point anguleux.

Exemple 18 .

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x|$.

On a $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$, donc $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ par suite f n'est pas dérivable en 0 d'où le point $O(0,0)$ est un point anguleux.

Fonction dérivée d'une fonction

Dérivabilité sur un intervalle

Definition 19 .

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$.

On dit que f est dérivable sur $[a,b]$ si f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et f est dérivable à droite en a et à gauche en b.

Fonction dérivée

Definition 20 .

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. On dit que f est dérivable sur I, si f est dérivable en tout point $x \in I$. La fonction

$$f' \; : \; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

est appelée la fonction dérivée de la fonction f.

Exemple 21 .

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Déterminons $f'(x)$, $x > 0$.

Pour tous réels x et a de $]0,+\infty[$ tels que $x \neq a$.

On a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \dfrac{\frac{a-x}{xa}}{x-a} = \dfrac{-(x-a)}{xa(x-a)} = \dfrac{-1}{ax}$, *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow a} \dfrac{-1}{ax} = \dfrac{-1}{a^2}$.

c'est-à-dire f est dérivable en a et $f'(a) = \dfrac{-1}{a^2}$. D'où, la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : $(\forall x \in]0,+\infty[)$, $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

Exemple 22 .

Étudier la dérivabilité de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$ et calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $]0,+\infty[$.

♣ *Soit x et a deux éléments de $]0,+\infty[$ tels que $x \neq a$.*

On a $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \dfrac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$ *donc*

$\lim\limits_{x\longrightarrow a} - \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\longrightarrow a} \dfrac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{a}}$, *c'est-à-dire f est dérivable en a et $g'(a) = \dfrac{-1}{2\sqrt{a}}$. D'où, la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :*

$$(\forall x \in]0,+\infty[) \, , g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{a}}.$$

♣ *Étudions la dérivabilité de la fonction g à droite en 0.*

Soit $x \in]0, +\infty[$.

On a $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. *Donc* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$. *D'où la fonction g n'est pas dérivable à droite en 0.*

Fonction dérivée seconde - Dérivées successives

Definition 23 .

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Sa dérivée f' peut-être aussi dérivable sur I on dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I.

La fonction qui à chaque x de I associe le nombre dérivé $f''(x)$ est appelée fonction dérivée seconde de f' qu'on note f''.

Cette fonction peut être elle-même dérivable, etc...

Exemple 24 .

♣ *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 2$.*

On a

$$f'(x) = 12x^2 - 6x + 5$$

et

$$f''(x) = 24x - 6$$

et

$$f^{(3)}(x) = 24.$$

♣ *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.*

On a

$$f'(x) = 3x^2$$

, *et*

$$f''(x) = -6x$$

et

$$f^{(3)}(x) = -6.$$

Fonction dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Ensemble de définiton de f	Fonction dérivée f'	Ensemble de définiton de f'
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivables

♣ Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors les fonctions $(f+g)$, $(f-g)$, $(f\times g)$ et f^n sont dérivables sur I.

♣ Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et $g \neq 0$ sur I alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I, et on a le tableau suivant

La somme	$f+g$ est dérivable sur I	$(f+g)' = f' + g'$
La soustraction	$f-g$ est dérivable sur I	$(f-g)' = f' - g'$
Produit	$f\times g$ est dérivable sur I	$(f\times g)' = f'\times g + f\times g'$
Puissance	f^n est dérivable sur I	$(f^n)' = nf'\times f^{n-1}$
Inverse	Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I	$\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$
Quotient	Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\times g - f\times g'}{g^2}$

Exemple 25 .

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f sans précisé son ensemble de dérivabilité dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$
2. $f(x) = -7x^5 + x^2$
3. $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x} + x^2 - 2$
4. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$
5. $f(x) = \left(\dfrac{3x-2}{2x+1}\right)^5$
6. $f(x) = (x^2-1)\sin x$
7. $f(x) = (3x^2 - x + 1)^5$
8. $f(x) = \dfrac{5}{3x^2 - x + 1}$

♣ $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ *on applique la formule* $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, *avec* $u(x) = 2x-1$ *et* $v(x) = x+1$.

On a $u'(x) = 2$ *et* $v'(x) = 1$ *donc* $f'(x) = \dfrac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

♣ $f(x) = \left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)^5$ *on applique la formule* $(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$, *avec* $u(x) = \frac{3x-2}{2x+1}$.

$$\text{On a } u'(x) = \frac{3x-2}{2x+1} = \frac{(3x-2)'(2x+1) - (3x-2)(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{7}{(2x+1)^2} \text{ donc}$$

$$f(x) = 5\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)^4 \times \frac{7}{(2x+1)^2} = \frac{35}{(2x+1)^2} \times \left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)^4$$

♣ $f(x) = (x^2-1)\sin x$ *on applique la formule* $(uv)' = u'v + uv'$ *avec* $u(x) = x^2 - 1$ *et* $v(x) = \sin x$.

On a $u'(x) = 2x$ *et* $v'(x) = \cos x$ *donc* $f'(x) = 2x \sin x + (x^2-1)\cos x$.

Remarque 26 .

a, b, c et d sont des réels tels que : $ad - bc \neq 0$. *La fonction* $u : x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ *est dérivable en tout point de* $D_u = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-d}{c}\right\}$, *et on a*

$$(\forall x \in D_u)\,,\ u'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

Résultat .

♣ Les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

♣ Les fonctions rationnelles (rapport de deux polynômes) sont dérivables sur leurs domaines de définitions.

Exemple 27 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 2}$.

1. *Donner* D_f.
2. *Montrer que f est dérivable sur* D_f.
3. *Calculer* $f'(x)$ *pour tout* $x \in D_f$.

♣ *On a* $D_f = \{x \in \mathbb{R}/\ 2x^2 - 5x + 2 \neq 0\}$. *Comme l'équation* $2x^2 - 5x + 2 = 0$ *admet deux solutions réelles distinctes* 2 *et* $\frac{1}{2}$ *donc*

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R}/\ x \neq 2 \text{ et } x \neq \frac{1}{2}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}.$$

♣ *f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son domaine de définition* $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$.

♣ *Calculons $f'(x)$:*

On applique la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ *avec* $u(x) = x^3 - 2x$ *et* $v(x) = 2x^2 - 5x + 2$, *et on a* $u'(x) = 3x^2 - 2$ *et* $v'(x) = 4x - 5$.

Soit $x \in D_f$ *on a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2-2)(2x^2-5x+2) - (x^3-2x)(4x-5)}{(2x^2-5x+2)^2} \\ &= \frac{2x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 4}{(2x^2-5x+2)^2} \end{aligned}$$

donc

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}\right), \quad f'(x) = \frac{2x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 4}{(2x^2-5x+2)^2}$$

Exemple 28 .

Soit f *la fonction définie sur* $]0, +\infty[$ *par :* $f(x) = \dfrac{1}{x} + x\sqrt{x}$.

Les fonctions $u : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $v : x \longmapsto x$ *et* $w : x \longmapsto \sqrt{x}$ *sont dérivables sur* $]0, +\infty[$ *donc la fonction* $f = u + v \times w$ *est dérivable sur* $]0, +\infty[$.

Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{x^2} + \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

Exemple 29 .

Soit f *la fonction définie sur* $I = \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ *par :* $f(x) = \tan x$.

Montrer que f *est dérivable sur* I *et déterminer sa dérivée.*

Soit $x \in I$ *on a* $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Les fonctions $u : x \longmapsto \sin x$ *et* $v : x \longmapsto \cos x$ *sont dérivables sur* I, *en plus* $v(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in I$ *donc la fonction* f *est dérivable sur* I, *comme quotient de deux fonctions dérivables.*

Soit $x \in I$, *on a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in I), f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

Remarque 30 .

La fonction $\tan$ *est dérivable en tout point de* $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ *et on a*

$$(\forall x \in D_{\tan}), \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dérivées des fonctions $x \longmapsto f(ax+b)$ et $\sqrt{f}$

Propriété 31 .

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux nombres réels $(a \neq 0)$. Et soit J l'ensemble des réels x tels que $(ax+b) \in I$. La fonction $g : x \longmapsto f(ax+b)$ est dérivable sur J, et on a

$$(\forall x \in J),\ g'(x) = a \times f'(ax+b)$$

Exemple 32 .

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \cos(x-1)$.

En posant : $f(x) = \cos x$, on obtient : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ h(x) = f(x-1)$.

Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-1) \in \mathbb{R}$ alors la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ h'(x) = -\sin(x-1)$$

Remarque 33 .

Le schéma est :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \underset{f}{\longmapsto} & x-1 & \underset{g}{\longmapsto} & \cos(x-1) \end{array}$$

et se ramène à

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \underset{g\circ f}{\longmapsto} & \cos(x-1) \end{array}$$

Les deux fonctions mises en jeu sont alors : $f : x \longmapsto x-1$ et $g : x \longmapsto \cos(x)$. On a bien $h = g \circ f$.

Propriété 34 .

Soit f une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I. La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur l'intervalle I, et on a

$$(\forall x \in I),\ g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

Exemple 35 .

Déterminons la fonction dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-x+1}$.

On cherche D_f :

On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} /\ x^2-x+1 \geq 0\}$ et comme le discriminant Δ du trinôme x^2-x+1 est -3 donc $(\forall x \in \mathbb{R}),\ x^2-x+1 > 0$. D'où $D_f = \mathbb{R}$.

On a la fonction $u : x \longmapsto x^2-x+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{(x^2-x+1)'}{2\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

Exemple 36 .

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$.

Déterminer D_f, puis calculer $f'(x)$.

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ x-2 \neq 0 \ et \ \frac{x+2}{x-2} \geq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ x \neq 2 \ et \ \frac{x+2}{x-2} \geq 0\right\} \end{aligned}$$

On a

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+2}{x-2}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

donc

$$D_f = \left]-\infty, -2\right] \cup \left]2, +\infty\right[$$

♠ *La fonction* $u : x \longmapsto \dfrac{x+2}{x-2}$ *est dérivable et strictement positive sur* $\left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$ *donc la fonction* $f = \sqrt{u}$ *est dérivable sur* $\left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$.

Étudions la dérivablilité de la fonction f à gauche de -2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x+2} &= \lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}}{x+2} \\ &= \lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} \times \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \\ &= \lim_{x \longrightarrow -2^-} -\sqrt{\frac{1}{(x+2)^2} \times \frac{x+2}{x-2}} \\ &= \lim_{x \longrightarrow -2^-} -\sqrt{\frac{1}{(x+2)(x-2)}} = -\infty \end{aligned}$$

donc la fonction f n'est pas dérivable à gauche de -2.

D'où la fonction f est dérivable sur $D_f \setminus \{-2\}$.

Soit $x \in D_f \setminus \{-2\}$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}} = \frac{\frac{-4}{(x-2)^2}}{2\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}} = \frac{-2}{(x-2)^2\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}}$$

Application de la dérivation

Monotonie d'une fonction et signe de sa fonction dérivée

Propriété 37 .

Soit f *une fonction dérivable sur* I.

♣ f *est croissante sur* I *si et seulement si* $(\forall x \in I)$, $f'(x) \geq 0$.

♣ f *est décroissante sur* I *si et seulement si* $(\forall x \in I)$, $f'(x) \leq 0$.

♣ f *est constante sur* I *si et seulement si* $(\forall x \in I)$, $f'(x) = 0$.

Remarque 38 .

♣ *Si* $f' \geq 0$ *sur* I *et* f' *ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors* f *est strictement croissante sur* I.

♣ *Si* $f' \leq 0$ *sur* I *et* f' *ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors* f *est strictement décroissante sur* I.

Exemple 39 .

Étudier les variations de la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 1$$

La fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et on a*

$$f'(x) = 15\left(x^4 - 2x^2 + 1\right) = 15\left(x^2 - 1\right)^2$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f'(x) \geq 0$, *comme la fonction* f' *ne s'annule qu'un nombre fini de fois alors* f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 40 .

Soit f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$

f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a* $f'(x) = 4(-x - 1)$.

Donc le signe de $f'(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ *est celui de* $-x - 1$, *d'où le tableau de signe de* f' *est le suivant*

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

♣ $(\forall x \in]-\infty,-1])$, $f'(x) \geq 0$, *comme la fonction* f' *ne s'annule qu'un nombre fini de points alors* f *est strictement croissante sur* $]-\infty,-1]$.

♣ $(\forall x \in [-1,+\infty[)$, $f'(x) \leq 0$, *comme la fonction* f' *ne s'annule qu'un nombre fini de points alors* f *est strictement décroissante sur* $[-1,+\infty[$.

Exemple 41 .

Soit f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$.
Donner le tableau de variation de f.
La fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, et on a* $f'(x) = 3(-x^2 + 2x + 3)$.
Donc le signe de $f'(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ *est le signe du trinôme* $-x^2 + 2x + 3$.
On a $\Delta = 4 - 4 \times (-1) \times 3 = 16 > 0$ *donc*

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \iff x = 3 \quad \text{ou } x = -1$$

on déduit le tableau de variation de f *:*

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	25	$\searrow$	$-\infty$

Exemple 42 .

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ *par* $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$.

1. *Déterminer les limites de la fonction* f *aux bornes de* D_f.
2. *Calculer* $f'(x)$ *puis dresser le tableau de variation de* f.

♠ *On a* $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

♣
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

♣
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

♣
$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$$

♣
$$\lim_{x \longrightarrow 1^6} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^6} \frac{x+2}{x-1} = -\infty$$

♠ *La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et on a*

$$f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$, $f'(x) < 0$, *d'où*

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

Exemple 43 *.*

Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\sin x \leq x$.

On considère la fonction φ définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *par :* $\varphi(x) = \sin x - x$

Les fonctions $u : x \longmapsto \sin x$ et $v : x \longmapsto -x$ sont dérivables sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *donc la fonction $f = u + v$ est dérivable sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right), \ \varphi'(x) = \cos x - 1$$

Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \iff -2 \leq \cos x - 1 \leq 0$$

donc

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] / \ \varphi'(x) \leq 0$$

D'où, la fonction φ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *par suite*

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \implies 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \implies \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \varphi(x) \leq \varphi(0) \implies 1 - \frac{\pi}{2} \leq \varphi(x) \leq 0$$

donc pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(x) \leq 0$. *Ce qui signifie que*

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right), \sin x \leq x$$

Extremums d'une fonction dérivable

Propriété 44 *.*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I. Si f admet un extremum local au point a, alors $f'(a) = 0$.

Remarque 45 .

On rappelle qu'un extremum est un maximum ou un minimum.

Propriété 46 .

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un élément de I. Si f' s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local de la fonction f .

Exemple 47 .

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 7$. Étudier les variations de f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $f'(x) = 6(x^2 - 5x + 6)$

Donc le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe du trinôme $x^2 - 5x + 6$.

On a

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = 3$$

On en déduit

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f			35				$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	34	$\nearrow$	

Ainsi f' s'annule aux points 2 et 3 tout en changeant de signe. Donc

♣ *$f(2) = 35$ est un maximum local de f atteint en 2.*

♣ *$f(3) = 34$ est un minimum local de f atteint en 3.*

Dérivée et calcul de limite

Calculons $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$.

On considère la fonction g définie par $g(x) = x^2 + 3x - 4$. On a $g(1) = 0$ donc $g(x) - g(1) = x^2 + 3x - 4$ et par suite

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1)$$

et comme $g'(x) = 2x + 3$ alors $g'(1) = 5$. Donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = 5$.

Calculons $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{(2x - 3)^{1011} - 1}{x - 2}$.

On considère la fonction f définie par $f(x) = (2x - 3)^{1011} - 1$. On a $f(2) = 0$ donc $f(x) - f(2) = (2x - 3)^{1011} - 1$ et par suite

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{(2x-3)^{1011}-1}{x-2} = \lim_{x \longrightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$$

et comme $f'(x) = 2022(2x-3)^{1010}$ alors $f'(2) = 2022$. Donc $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{(2x-3)^{1011}-1}{x-2} = 2022$.

Équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Definition 48 .

Soit ω un nombre réel non nul.

♣ *L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ où l'inconnue est une fonction y telle que y'' est sa dérivée seconde est appelée équation différentielle.*

♣ *Toute fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'égalité $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ pour tout réel x est appelée solution de l'équation différentielle.*

Exemple 49 .

Les équation suivantes : $(E) : y'' + 9y = 0$ et $(E') : y'' + 16y = 0$ sont des équations différentielles.

Propriété 50 .

Soit ω un nombre réel non nul.

La solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y : x \longmapsto a\cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Exemple 51 .

Résolvons l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = 0$.

On a $(E) : y'' + 4y = 0$ c'est-à-dire $y'' + 2^2 y = 0 \quad (\omega = 2)$.

Donc la solution générale de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y : x \longmapsto \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x) \quad \textit{où } \alpha \in \mathbb{R} \textit{ et } \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemple 52 .

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + y = 0$.

La solution générale de cette équation différentielle est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y : x \longmapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) \quad \textit{où } \alpha \in \mathbb{R} \textit{ et } \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemple 53 .

1. *Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + 25y = 0$*
2. *Déduire la solution f de l'équation différentielle (E) telle que : $f\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{5}\right) = -1$.*

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com