Série d'exercices sur Limites et Continuité

EXERCICE 1 .

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} \quad , \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2+4x}-x \quad , \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$$

$$\lim_{x\longrightarrow-2}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4} \quad , \quad \lim_{x\longrightarrow3}\frac{\sqrt{3x}-3}{x-3} \; , \quad \lim_{x\longrightarrow\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\dfrac{\pi}{4}}$$

EXERCICE 2 .

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|} \quad , \quad x\neq1 \\ f(1)=2 \end{cases}$

Étudier la continuité de f en $x_0=1$.

EXERCICE 3 .

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^3-x-14}{x^2-x-2} \; , \quad x>2 \\ f(x)=\dfrac{x-2}{2x^2+x-10} \; , \quad x<2 \\ f(2)=\dfrac{1}{9} \end{cases}$

Étudier la continuité de f en $x_0=2$.

EXERCICE 4 .

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=2+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \; , \; x\neq0 \\ f(0)=2 \end{cases}$

Étudier la contnuité de f en $x_0=0$.

EXERCICE 5 .

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{21(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3})}{2x^2-3x+1} \; , \quad x\neq1 \text{ et } x\neq\dfrac{1}{2} \\ f(1)=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Étudier la contnuité de f en $x_0=1$.

EXERCICE 6 .

Soit f une fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = 3x^2 + bx + 1 \quad , \quad x < 1 \\ \\ f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \quad , \quad x \geq 1 \end{cases}$ *avec* $b \in \mathbb{R}$.

Déterminer la valeur de b pour que la fonction f soit continue en 1.

EXERCICE 7 .

Étudier la continuité de la fonction f sur D_f dans chaque cas.

1. $f(x) = x + \sqrt{x+1}$
2. $f(x) = 4x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$
3. $f(x) = 2\sqrt{x} - x$
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

EXERCICE 8 .

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 4x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.*
2. *Dresser le tableau de variation de f.*
3. *Déterminer l'image des intervalles suivants par la fonction f.*

$$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \, , \quad \left]1, \frac{3}{2}\right]$$

EXERCICE 9 .

Montrer que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$, *admet une unique racine dans l'intervalle* $]-1, 0[$.

EXERCICE 10 .

1. *Montrer que l'équation :* $(E) : -2x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} - 5x = -10$ *admet une seule solution α sur* $]0, +\infty[$.
2. *Vérifier que :* $1,4 < \alpha < 1,5$.
3. *Résoudre dans* $]0, +\infty[$ *l'inéquation* $(I) : 2x\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + 5x - 10 < 0$.

EXERCICE 11 .

1. *Montrer que l'équation :* $x^5 + 4x^3 + 5x - 7 = 0$ *admet une unique solution α dans* $\mathbb{R}$ *et que :* $0 < \alpha < 1$.
2. *Vérifier que :* $0,840 < \alpha < 0,841$.

EXERCICE 12 .

Soit f une fonction définie sur $]-\infty, 0]$ *par :* $f(x) = -3x^2 + 3x + 1.$

1. *Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.*
2. *Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.*

EXERCICE 13 .

Soit f une fonction définie sur $[2, +\infty[$ *par :* $f(x) = \sqrt{x-2} + x + 1.$

1. *Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.*
2. *Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.*

EXERCICE 14 .

1. *Déterminer les nombres a et b tel que :* $(\forall x \in \mathbb{R}), x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + ax + b)$.
2. *Soit t le réel défini par :* $t = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$

   a) *Montrer que t est une solution de l'équation :* $x^3 - 3x - 18 = 0$ *dans* $\mathbb{R}$.

   b) *En déduire que :* $t = 3$.

FIN

Pr : Yahya MATIOUI