www.etude-generale.com
Matiére : Mathématique
Professeur : Yahya MATIOUI

Correction du devoir surveillé N°2

Problème d'analyse

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}$

1. *Cherchons l'ensemble de définition D_f :*

   On a

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \ x^2 - 2x \geq 0\right\}$$

On résout l'inéquation suivante : $x^2 - 2x \geq 0$

$$x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Le tableau de signe de $x^2 - 2x$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $x^2 - 2x \geq 0 \iff x \in \left]-\infty, 0\right] \cup \left[2, +\infty\right[$. *D'où*

$$D_f = \left]-\infty, 0\right] \cup \left[2, +\infty\right[$$

a) *Calculons* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$:

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x - 2 = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x} = +\infty$ *donc*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x} = -\infty - \infty = -\infty$$

b) *Étudions la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$:*

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, *calculons* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x-2-\sqrt{x^2-2x}}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}1-\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}1-\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x^2(1-\frac{2}{x})}}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}1-\frac{2}{x}+\frac{x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}1-\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}=2
\end{aligned}$$

Calculons : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}f(x)-2x$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty}f(x)-2x &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}x-2-\sqrt{x^2-2x}-2x\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}-x-2-\sqrt{x^2-2x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}-\left(x+2+\sqrt{x^2-2x}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}-\left(\frac{\left(x+2+\sqrt{x^2-2x}\right)\left(x+2-\sqrt{x^2-2x}\right)}{x+2-\sqrt{x^2-2x}}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}-\left(\frac{(x+2)^2-\sqrt{x^2-2x}^2}{x+2-\sqrt{x^2-2x}}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}-\left(\frac{x^2+4x+4-x^2+2x}{x+2-\sqrt{x^2-2x}}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}-\left(\frac{6x+4}{x+2+x\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}-\left(\frac{x\left(6+\dfrac{4}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}\right)}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty}-\frac{6+\dfrac{4}{x}}{1+\dfrac{2}{x}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}=-3
\end{aligned}$$

donc la courbe (C_f) *admet une asymptote oblique d'équation* $y=2x-3$ *au voisinage de* $-\infty$.

c) *Calculons* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{(x-2)^2 - (x^2 - 2x)}{x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 4 - x^2 + 2x}{x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{-2x + 4}{x\left(1 - \dfrac{2}{x} + \sqrt{1 - \dfrac{2}{x}}\right)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x\left(-2 + \dfrac{4}{x}\right)}{x\left(1 - \dfrac{2}{x} + \sqrt{1 - \dfrac{2}{x}}\right)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{-2 + \dfrac{4}{x}}{1 - \dfrac{2}{x} + \sqrt{1 - \dfrac{2}{x}}} = -1
\end{aligned}$$

donc la courbe (C_f) *admet une asymptote horizontale d'équation* $y = -1$ *au voisinage de* $+\infty$.

2. ***** *Étudions la dérivabilité de la fonction* f *à droite de* 2 :

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x}}{x - 2} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 2} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 2^+} 1 - \frac{x\,(x - 2)}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 2x}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 2^+} 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}} \\
&= 1 - \frac{2}{0^+} = -\infty
\end{aligned}$$

donc, la fonction f *n'est pas dérivable à droite de* 2. *D'où la courbe* (C_f) *admet une demi-tangente en point* $A(2, 0)$ *vers le bas.*

***** *Étudions la dérivabilité de la fonction* f *à gauche de* 0 :

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{x-2-\sqrt{x^2-2x}+2}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{x-\sqrt{x^2-2x}}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-} 1-\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-} 1+\frac{x\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-} 1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}=+\infty
\end{aligned}$$

donc, la fonction f n'est pas dérivable à gauche de 0. D'où la courbe (C_f) admet une demi-tangente en point $B(0,-2)$ vers le bas.

a) *La fonction $x \longmapsto x^2-2x$ est dérivable et strictement positive sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ donc la fonction $u : x \longmapsto \sqrt{x^2-2x}$ est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ de plus la fonction $w=-u$ est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ et comme $t : x \longmapsto x-2$ est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$. D'où la fonction $f=w+t$ est dérivable sur $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$.*

Pour tout $x\in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x-2-\sqrt{x^2-2x}\right)'\\
&= 1-\frac{(x^2-2x)'}{2\sqrt{x^2-2x}}\\
&= 1-\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}\\
&= 1-\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\\
&= \frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}
\end{aligned}$$

b) * *Pour tout $x\in]-\infty,0[$ on a $\sqrt{x^2-2x}-(x-1)>0$ et $\sqrt{x^2-2x}>0$ donc*

$$(\forall x\in]-\infty,0[),\ f'(x)>0$$

* *Pour tout $x\in]2,+\infty[$, on a*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-1)}{\sqrt{x^2-2x}}\\
&= \frac{\sqrt{x^2-2x}^2-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x}(\sqrt{x^2-2x}+(x-1))}\\
&= \frac{(x^2-2x-(x^2-2x+1))}{\sqrt{x^2-2x}(\sqrt{x^2-2x}+(x-1))}\\
&= \frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}\left(\sqrt{x^2-2x}+(x-1)\right)}
\end{aligned}$$

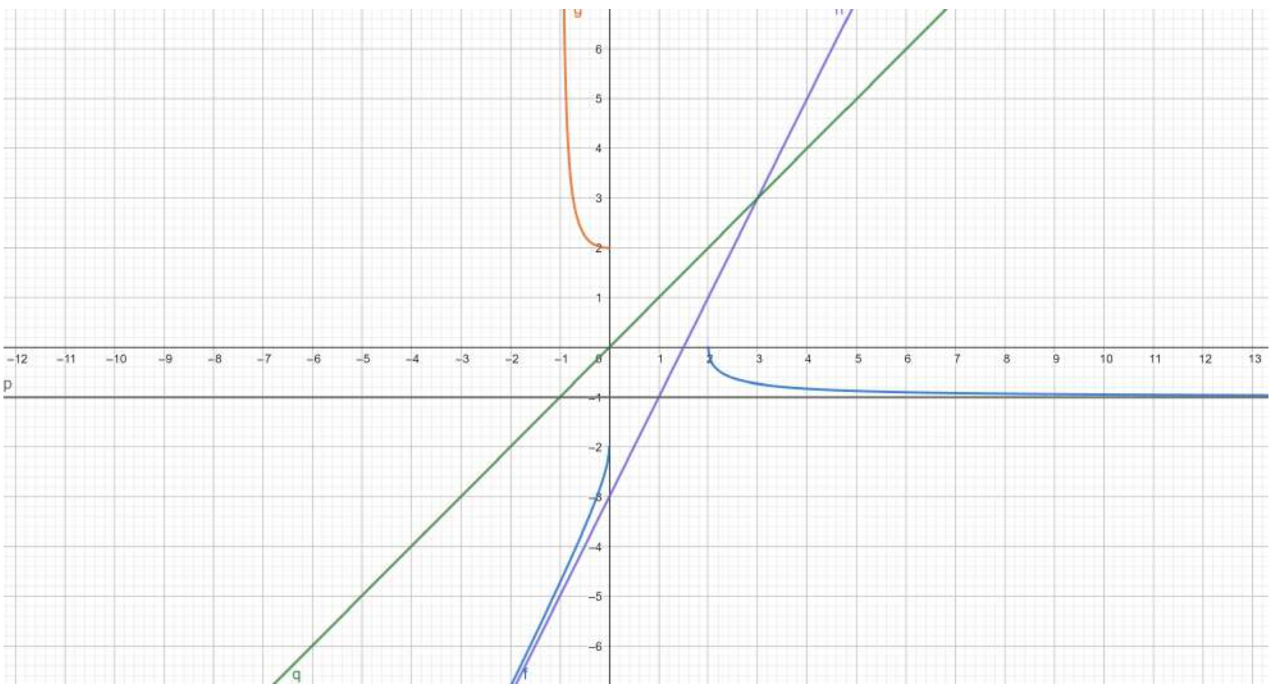
et comme $x-1>1>0$ *alors* $\sqrt{x^2-2x}+(x-1)>0$ *donc*

$$(\forall x \in]2,+\infty[)\,, \quad f'(x)<0$$

c) *Tableau de variation de la fonction* f:
On a

x	$-\infty$ 0	0 2	2 $+\infty$
$f'(x)$	$+$	//////	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow -2$	//////	$0 \searrow -1$

3. *On trace la courbe* (C_f) *dans un dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



4. *On considére la fonction* g *la restriction de la fonction* f *sur* $[2,+\infty[$.

$$g(x)=f(x)=x-2-\sqrt{x^2-2x}\,, \quad \forall x\in[2,+\infty[$$

a) *Montrons que* g *admet une fonction réciproque définie sur* J.
La fonction g *est continue et strictement décroissante sur* $[2,+\infty[$ *alors elle admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur l'intervalle* $J=g(I)$.
On a

$$J=g(I)=g([2,+\infty[)=\left]\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x), f(2)\right]=]-1,0].$$

b) *Calculons* $(g^{-1})'(2-2\sqrt{2})$.

On a : $g(4)=2-2\sqrt{2}$ *et* $g'(4)\neq 0$, *alors* g^{-1} *est dérivable en* $2-2\sqrt{2}$ *et on a*

$$(g^{-1})'(2-2\sqrt{2})=\frac{1}{g'(g^{-1}(2-2\sqrt{2}))}=\frac{1}{g'(4)}\quad /\text{car } g^{-1}(2-\sqrt{2})=4$$

$$\text{et } g'(4)=\frac{\sqrt{(4)^2-2\times 4}-(4-1)}{\sqrt{(4)^2-2\times 4}}=1-\frac{3\sqrt{2}}{4}\ \textit{donc}$$

$$(g^{-1})'(2-2\sqrt{2})=\frac{1}{g'(4)}=\frac{1}{1-\frac{3\sqrt{2}}{4}}=-6\sqrt{2}-8$$

c) *Déterminons* $g^{-1}(x)$ *pour tout* $x\in J$:

Soit $y\in\,]-1,0]$ *et* $x\in[2,+\infty[$ *avec* $y=g^{-1}(x)$

On a

$$\begin{aligned}
y &= g^{-1}(x) \iff g(y)=x\\
&\iff y-2-\sqrt{y^2-2y}=x\\
&\iff x-y+2=-\sqrt{y^2-2y}\\
&\iff (x-y+2)^2=\left(-\sqrt{y^2-2y}\right)^2\\
&\iff (x-y)^2+4(x-y)+4=y^2-2y\\
&\iff x^2-2yx+y^2+4x-4y+4=y^2-2y\\
&\iff x^2-2yx+4x-2y+4=0\\
&\iff y(-2x-2)=-x^2-4x-4\\
&\iff y=\frac{-x^2-4x-4}{-2x-2}\\
&\iff y=\frac{x^2+4x+4}{2x+2}\\
&\iff y=\frac{(x+2)^2}{2x+2}
\end{aligned}$$

donc

$$\forall x\in\,]-1,0]\,,\quad g^{-1}(x)=\frac{(x+2)^2}{2x+2}$$

d) *Voir la question* 3.

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

www.**etude − generale.com**