www.etude-generale.com
Matiére : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Correction du Devoir Maison N°2

Durée 1H30

Problème d'analyse.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + \dfrac{2}{x}, & x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\\ f(x) = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}, & x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

1. **a)** *Montrons que f est continue au point* 1.

   On a : $f(1) = \dfrac{1+1}{2\sqrt{1}} = 1$ *et* $f(-1) = -(-1) + \dfrac{2}{(-1)} = -1.$

   * *Calculons* $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x)$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{1+x}{2\sqrt{x}} = \frac{1+1}{2\sqrt{1}} = 1 = f(1)$$

   Donc, la fonction f est continue à droite de 1.

   * *Calculons* $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x)$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} -x + \frac{2}{x} = -1 + \frac{2}{1} = 1 = f(1)$$

   Donc, la fonction f est continue à gauche de 1.

   D'où la fonction f est continue en 1.

2. **a)** *Montrons que f est dérivable à gauche de* 1.

   Calculons $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{-x+\dfrac{2}{x}-1}{x-1}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{\dfrac{-x^2}{x}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{x}{x}}{x-1}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{\dfrac{-x^2-x+2}{x}}{x-1}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{-x^2-x+2}{x(x-1)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{-(x+2)(x-1)}{x(x-1)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{-(x+2)}{x}=\frac{-(1+2)}{1}=-3
\end{aligned}$$

Donc, la fonction f est dérivable à gauche de 1 et on a $f'_g(1)=-3$.

b) *L'équation de la demi tangente (Δ_1) à gauche de 1.*

Puisque la fonction f est dérivable à gauche de 1,alors (C_f) admet une demi tangente à gauche au point $A(1,1)$ définie par

$$(\Delta_1):\begin{cases} y=4-3x \\ x\leq 1\end{cases} \quad :$$

c) *Étudions La dérivabilité à droite de 1 :*

Calculons $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}-1}{x-1}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{\dfrac{1+x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x-1}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}^2-1^2)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=\frac{0}{2\sqrt{1}(\sqrt{1}+1)}=0
\end{aligned}$$

Donc, la fonction f est dérivable à droite de 1 et on a $f'_d(1)=0$.

Interprétation géométrique.

La courbe (C_f) admet une demi tangente à droite au point $A(1,1)$ définie par $(\Delta_2) : \begin{cases} y = 1 \\ \\ x \geq 1 \end{cases}$

En résumé f n'est pas dérivable en 1.

3. **a)** *Calculons* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$:

   On a : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} -x = +\infty$ *donc*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

   b) *Montrons que (C_f) admet une asymptote oblique (D).*

   Calculons $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$:

   On a

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{-x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{-x}{x} + \frac{1}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} -1 + \frac{1}{x^2} = -1$$

   Calculons $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) + x$:

   On a

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \longrightarrow -\infty} -x + \frac{1}{x} + x = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

   Donc, la courbe (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $(D) : y = -x$ au voisinage de $-\infty$.

   c) *Calculons* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

   On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1 + x}{2\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x} + 1\right) \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\frac{1}{x} + 1\right)}{2} = +\infty
\end{aligned}$$

   donc

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

d) *Étudions la nature de la branche infinie au voisinage de* $+\infty$:

Calculons $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}}{x}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1+x}{2\sqrt{x}\times x}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x\left(\dfrac{1}{x}+1\right)}{2\sqrt{x}\times x}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+1}{2\sqrt{x}}=0$$

Interprétation géométrique.

La courbe (C_f) *admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de* $+\infty$.

e) *Étudions la nature de la branche infinie au voisinage de* 0.

On a

$$\lim_{x\longrightarrow0^+}f(x)=\lim_{x\longrightarrow0^+}-x+\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty\quad\text{et}$$

$$\lim_{x\longrightarrow0^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow0-}-x+\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

La courbe (C_f) *admet une asymptote verticale d'équation* $x=0$.

4. **a)** *Les fonctions* $u:x\longmapsto-x$ *et* $v:x\longmapsto\dfrac{2}{x}$ *sont dérivables sur* $]-\infty,0[\cup]0,1[$ *donc la fonction* $f=u+v$ *est dérivable sur* $]-\infty,0[\cup]0,1[$.

Soit $x\in]-\infty,0[\cup]0,1[$, *on a*

$$f'(x)=\left(-x+\frac{2}{x}\right)'=-1-\frac{2}{x^2}$$

donc $(\forall x\in]-\infty,0[\cup]0,1[)\,,\;f'(x)=-1-\dfrac{2}{x^2}<0$.

d'où f *est strictement décroissante sur l'intervalle* $]-\infty,0[$ *et sur* $]0,1[$.

b) *La fonction* $u:x\longmapsto1+x$ *est dérivable sur* $]1,+\infty[$ *et comme la fonction* $v:x\longmapsto2\sqrt{x}$ *est dérivable et ne s'annule pas sur* $]1,+\infty[$ *donc la fonction* $f=\dfrac{u}{v}$ *est dérivable sur* $]1,+\infty[$.

Soit $x\in]1,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)'\\&=\frac{(1+x)'2\sqrt{x}-(1+x)(2\sqrt{x})'}{(2\sqrt{x})^2}\\&=\frac{2\sqrt{x}-(1+x)\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{4x}\\&=\frac{\dfrac{2x-(1+x)}{\sqrt{x}}}{4x}\\&=\frac{x-1}{4x\sqrt{x}}\end{aligned}$$

donc $(\forall x \in]1,+\infty[)\,,\;\; f'(x) = \dfrac{x-1}{4x\sqrt{x}} > 0$. *Ce qui signifie que la fonction f est strictement croissante sur* $[1,+\infty[$.

c) *Le tableau de variations de f.*

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

5. *L'équation de la tangente (Δ_2) en $-\sqrt{2}$.*

   L'équation de la tangente s'écrit sous la forme

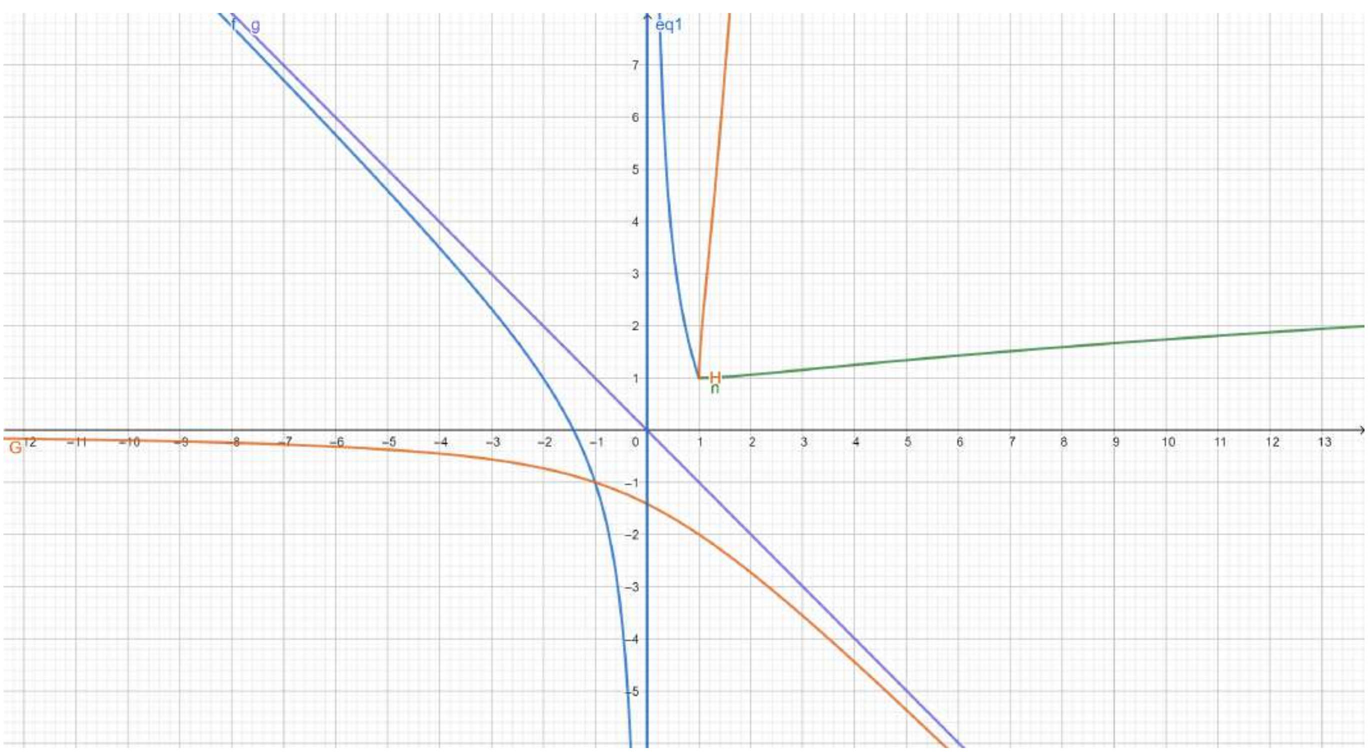
$$y = f'(-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) + f(-\sqrt{2}) = -2(x+\sqrt{2}) + 0$$

$$f'(-\sqrt{2}) = -1 - \frac{2}{(-\sqrt{2})^2} = -2 \;\text{ et }\; f(-\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{2}{-\sqrt{2}} = 0$$

Donc

$$y = -2x - 2\sqrt{2}$$

6. *La courbe (C_f).*



1. **7)** *Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 0[$.*

$$g(x) = f(x) = -x + \frac{2}{x} \quad ; \quad \forall x \in]-\infty, 0[$$

a) *La continuité de g sur $]-\infty, 0[$.*

- *Les fonction $u : x \longmapsto -x$ et $v : x \longmapsto \dfrac{2}{x}$ sont continues sur $]-\infty, 0[$ alors la fonction $g = u + v$ est continue sur $]-\infty, 0[$.*
- *La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.*

Donc la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = g(I) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

b) *Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in]-\infty, 0[$, on a*

$$\begin{aligned}
y &= g(x) \iff y = -x + \frac{2}{x} \\
&\iff y + x = \frac{2}{x} \\
&\iff (y + x) \times x = 2 \\
&\iff yx + x^2 - 2 = 0 \\
&\iff x^2 + yx - 2 = 0 \\
&\iff x^2 + yx - 2 = 0
\end{aligned}$$

Calculons le discriminant Δ.

$$\Delta = (y)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = y^2 + 8 > 0$$

Donc, l'équation admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-y + \sqrt{y^2 + 8}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-y - \sqrt{y^2 + 8}}{2}$$

Recherche de l'expression adéquate
On a $g(-1) = -1$ donc $g^{-1}(-1) = -1$. On remplace y par -1 dans l'expression de x_1 on obtient :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{(-1)^2 + 8}}{2} = 2$$

On remplace y par -1 dans l'expression de x_2 on obtient :

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{(-1)^2 + 8}}{2} = -1$$

or $2 \neq -1$ donc x_1 n'est pas la bonne solution. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad g^{-1}(x) = \frac{-x - \sqrt{x^2 + 8}}{2}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**