# Correction de la série

**EXERCICE 1** .

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ :

   *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\sqrt{(x^2+1)^2}-\sqrt{(x^2-1)^2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

   *et comme* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}=+\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$ *donc*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=0$$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt{x^2+4x}-x$ :

*On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2+4x}-x &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}-x\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}}-x\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}-x\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}-1\right) \quad / \quad |x|=x\ ,x>0\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x\left(\frac{\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x\left(\frac{1+\frac{4}{x}-1}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x\left(\frac{4}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1\right)}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}
\end{aligned}$$

*et comme* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1=2$ *alors* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=2$ *donc*

*donc*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2+4x}-x=2$$

*3.* $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ :

*On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2+x}-x &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1\right)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

*donc*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\frac{1}{2}$$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow-2}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}$ :

   *On a* : $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\left(x^2-1\right)$ *et* $x^2-4=(x+2)(x-2)$ *donc*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longmapsto-2}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4} &= \lim_{x\longrightarrow-2}\frac{(x+2)\left(x^2-1\right)}{(x-2)(x+2)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow-2}\frac{x^2-1}{x-2}\\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow3}\dfrac{\sqrt{3x}-3}{x-3}$ :

   *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow3}\frac{\sqrt{3x}-3}{x-3} &= \lim_{x\longrightarrow3}\frac{\left(\sqrt{3x}-3\right)\left(\sqrt{3x}+3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{3x}+3\right)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow3}\frac{3x-9}{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow3}\frac{3(x-3)}{(x-3)(\sqrt{3x}+3)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow3}\frac{3}{(\sqrt{3x}+3)}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

*donc*

$$\lim_{x \longrightarrow 3} \frac{\sqrt{3x}-3}{x-3} = \frac{1}{2}$$

*6.* $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ :

*En posant* $X = x - \dfrac{\pi}{4}$ *on obtient* :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}} &= \lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-1}{x-\frac{\pi}{4}} \\
&= \lim_{X \longrightarrow 0} \frac{\tan\left(X+\frac{\pi}{4}\right)-1}{X} \\
&= \lim_{X \longrightarrow 0} \frac{\dfrac{\tan X + \tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan(X)\times\tan\frac{\pi}{4}}-1}{X} \\
&= \lim_{X \longrightarrow 0} \frac{\dfrac{\tan(X)+1}{1-\tan X}-1}{X} \\
&= \lim_{X \longrightarrow 0} \frac{\dfrac{2\tan X}{1-\tan X}}{X} \\
&= \lim_{X \longrightarrow 0} \frac{2\tan X}{X(1-\tan X)} \\
&= \lim_{X \longrightarrow 0} 2\frac{\tan X}{X} \times \frac{1}{1-\tan X} \\
&= \lim_{X \longrightarrow 0} 2\frac{\tan X}{X} \times \frac{1}{1-\dfrac{\tan X}{X}\times X}
\end{aligned}$$

*et comme* $\displaystyle\lim_{X \longrightarrow 0} \frac{\tan X}{X} = 1$ *et* $\displaystyle\lim_{X \longrightarrow 0} \frac{1}{1-\dfrac{\tan X}{X}\times X} = 1$ *alors* $\displaystyle\lim_{X \longrightarrow 0} 2\frac{\tan X}{X} \times \frac{1}{1-\dfrac{\tan X}{X}\times X} = 2$ *donc*

$$\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}} = 2$$

**EXERCICE 2** .

*Soit* $f$ *la fonction numérique définie par* : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}, & x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$

*Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x)$ :
*Tableau de signe de* $x-1$ :

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $x-1$ | $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ |

*On a* $(\forall x \in ]1,+\infty[)\,,\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$
*donc*

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 1^+} x+1=2=f(1)\,.\end{aligned}$$

*C'est-à-dire* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=f(1)$.

*D'où* $f$ *est continue à droite en* 1.

*On a* $(\forall x \in ]-\infty,1[)\,,\ f(x)=-\dfrac{x^2-1}{x-1}$
*donc*

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 1^-} -\frac{x^2-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 1^-} -\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 1^-} -(x+1)\\ &= -2.\end{aligned}$$

*C'est-à-dire* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)\neq f(1)$.

*D'où* $f$ *n'est pas continue à gauche de* 1.

*Donc* $f$ *est continue à droite en* 1 *et non continue à gauche en* 1*. D'où* $f$ *n'est pas continue en* 1.

**EXERCICE 3** .

*Soit* $f$ *la fonction numérique définie par :* $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^3-x-14}{x^2-x-2}\ , & x>2\\[2ex] f(x)=\dfrac{x-2}{2x^2+x-10}\ , & x<2\\[2ex] f(2)=\dfrac{1}{9}\end{cases}$

*Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x)$ :

*On a* $(\forall x \in ]2,+\infty[)\,,\ f(x)=\dfrac{2x^3-x-14}{x^2-x-2}$

*On a :* $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$. *Effectuons la division euclidienne de* $2x^3-x-14$ *par* $x-2$ *on obtient :* $2x^3-x-14=(x-2)(2x^2+4x+7)$.

*Donc*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{2x^3-x-14}{x^2-x-2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{(x-2)(2x^2+4x+7)}{(x+1)(x-2)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{2x^2+4x+7}{x+1}\\
&= \frac{23}{3}
\end{aligned}$$

*C'est-à-dire* $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x)\neq f(2)$.

*D'où* $f$ *n'est pas continue à droite en* $2$. (1)

*On a* $(\forall x\in\,]-\infty,2[)\,,\ f(x)=\dfrac{x-2}{2x^2+x-10}$

*On a :* $2x^2+x-10=(2x+5)(x-2)$.

*Donc*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x-2}{2x^2+x-10}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{(x-2)}{(2x+5)(x-2)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{1}{2x+5}=\frac{1}{9}=f(2)
\end{aligned}$$

*C'est-à-dire* $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x)=f(2)$.

*D'où* $f$ *est continue à gauche en* $2$. (2)

*De* (1) *et* (2) *on déduit que* $f$ *n'est pas continue en* $2$.

**EXERCICE 4** .

*Soit* $f$ *la fonction numérique définie par :* $\begin{cases} f(x)=2+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & ,\ x\neq 0\\ f(0)=2 \end{cases}$

*Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$ :

*Soit* $x\in\mathbb{R}^*$.

*On a* $-1\leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq 1$ *et* $x^2>0$ *donc:* $-x^2\leq x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq x^2$ *d'où*

$$2-x^2\leq f(x)\leq 2+x^2$$

*puisque* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} 2-x^2=2$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} 2+x^2=2$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=2$ (*d'après la propriété des limites et ordre*).

*C'est-à-dire* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=f(0)$.

*D'où* $f$ *est continue en* $0$.

**EXERCICE 5** .

*Soit $f$ la fonction numérique définie par :* $\begin{cases} f(x) = \dfrac{21\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}\right)}{2x^2-3x+1} \ , & x \neq 1 \ et \ x \neq \dfrac{1}{2} \\ f(1) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

*Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x)$ :

*On a* : $2x^2-3x+1 = (2x-1)(x-1)$.

*Donc*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) &= \frac{21(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3})}{2x^2-3x+1} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{21\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)}{(2x-1)(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{21\left[(3x+1)-(x+3)\right]}{(2x-1)(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{42(x-1)}{(2x-1)(x-1)(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3})} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{42}{(2x-1)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)} \\
&= \frac{42}{(2\times 1-1)(\sqrt{3\times 1+1}+\sqrt{1+3})} \\
&= \frac{21}{2}
\end{aligned}$$

*c'est-à-dire* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ . *D'où la fonction $f$ n'est pas continue en* $1$.

**EXERCICE 6** .

*Soit $f$ une fonction numérique définie par :* $\begin{cases} f(x) = 3x^2+bx+1 \ , & x<1 \\ f(x) = \sqrt{x-1}+2 \ , & x \geq 1 \end{cases}$ *avec* $b \in \mathbb{R}$.

*$f$ est continue en $1$ si et seulement si :* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)$.

*On a* : $f(1) = 2$ $\left(\text{on a remplacé dans la } 2^{éme} \text{ expression } x \geq 1\right)$.

*On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \sqrt{x-1}+2 = 2 = f(1)$.

*On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} 3x^2+bx+1 = 4+b$, *donc*

$$\begin{aligned}
(f \text{ est continue en } 1) &\iff \lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) \\
&\iff 4+b = 2 \\
&\iff b = 2-4 \\
&\iff b = -2
\end{aligned}$$

*par suite $f$ est continue en $1$ si et seulement si* $b=-2$.

**EXERCICE 7** .

1. *Déterminons* $D_f$ :

   *On a* $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x+1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq -1\} = [-1, +\infty[$ .

   *Étudions la continuité de* $f$ *sur* $[-1, +\infty[$ .

   ♣ *La fonction* $x \longmapsto x+1$ *est continue et positive sur* $[-1, +\infty[$ . *Donc la fonction* $u : x \longmapsto \sqrt{x+1}$ *est continue sur* $[-1, +\infty[$ .

   ♣ *La fonction* $v : x \longmapsto x$ *est une fonction polynôme donc elle est continue sur* $\mathbb{R}$ *et en particulier sur l'intervalle* $[-1, +\infty[$ .

   *Donc* $f = u + v$ *est continue sur l'intervalle* $[-1, +\infty[$ .

2. *Déterminons* $D_f$ :

   *On a* : $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

   *Étudions la continuité de* $f$ *sur* $D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

   ♣ $f_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ *est une fonction rationnelle donc elle est continue en tout point de* $D_f$.

   ♣ $f_2 : x \longmapsto 4x+1$ *est une fonction polynôme donc elle est continue sur* $\mathbb{R}$ *et en particulier sur* $D_f$.

   *Donc* $f = f_1 + f_2$ *est continue sur* $]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

3. *Déterminons* $D_f$ :

   *On a* $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \geq 0\} = [0, +\infty[$ .

   *Étudions la continuité de* $f$ *sur* $D_f = [0, +\infty[$ .

   ♣ $h : x \longmapsto \sqrt{x}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$ *(fonction usuelle)* .

   ♣ $g : x \longmapsto -x$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et en particulier sur* $[0, +\infty[$ .

   *Donc* $f = 2h + g$ *est continue sur* $[0, +\infty[$ .

4. *On détermine* $D_f$ :

   *On a* $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \ 1 - x \neq 0 \ \ et \ \ \dfrac{1+x}{1-x} \geq 0 \right\}$

   $1 - x \neq 0 \iff x \neq 1.$

   *Tableau de signe de* : $\dfrac{1+x}{1-x}$

*On a :* $1+x=0 \iff x=-1$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $1+x$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $1-x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $\frac{1+x}{1-x}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $-$ |

*Donc:* $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 0 \iff x \in [-1,1[$. *D'où*

$$D_f=[-1,1[$$

*Étudions la continuité de* $f$ *sur* $D_f=[-1,1[$

*La fonction* $u : x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$ *est continue et positive sur* $[-1,1[$, *donc la fonction* $f=\sqrt{u}$ *est continue sur* $[-1,1[$.

**EXERCICE 8** .

*On considère la fonction* $f$ *définie sur :* $f(x)=4x+1+\dfrac{1}{x-1}$.

1. $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

   *On a*

$$\begin{aligned}(\forall x\in D_f)\,,\quad f'(x) &= 4-\frac{1}{(x-1)^2}\\ &= \frac{4(x-1)^2-1}{(x-1)^2}\\ &= \frac{4x^2-8x+3}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

*donc*

$$(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\})\,,f'(x)=\frac{4x^2-8x+3}{(x-1)^2}$$

*Le signe de* $f'(x)$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ *est celui de* $4x^2-8x+3$ $\big($*car* $(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\})\,,\ (x-1)^2>0\big)$
*de plus :* $4x^2-8x+3=0 \iff (2x-1)(2x-3)=0 \iff 2x-1=0$ *ou* $2x-3=0$
$\iff x=\dfrac{1}{2}$ *ou* $x=\dfrac{3}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x2-8x+3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

*d'où*

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(\frac{1}{2})$ | $\searrow$ | $\|\|$ | $\searrow$ | $f(\frac{3}{2})$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2. *La fonction $f$ est strictement croissante sur* $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ *et strictement décroissante sur* $\left]1, \dfrac{3}{2}\right]$. *Il en découle les résultats suivants :*

$$f\left(\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]\right) = \left]\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x),\ f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left]-\infty, 1\right],\quad f\left(\left]1, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{3}{2}\right), \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x)\right[ = [9, +\infty[$$

**EXERCICE 9** .

*On considère la fonction $f$ définie par :* $f(x) = x^3 + x + 1$

* *La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme, et en particulier elle est continue sur* $[-1, 0]$. (1)
* *Et on a :* $f'(x) = 3x^2 + 1$ *donc* $(\forall x \in [-1, 0])$, $f'(x) > 0$, *d'où $f$ est strictement croissante sur* $[-1, 0]$. (2)
* *On a:* $f(-1) = -1$ *et* $f(0) = 1$ *donc* $f(-1) \times f(0) < 0$. (3)

*D'après* (1), (2) *et* (3) *on en déduit que l'équation* $x^3 + x + 1 = 0$ *admet une solution unique dans l'intervalle* $]-1, 0[$.

**EXERCICE 10** .

1. *On considère la fonction $f$ définie sur* $]0, +\infty[$ *par :* $f(x) = -2x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} - 5x + 10$.

   ♣ *Les fonctions* $u : x \longmapsto -2x$ , $v : x \longmapsto \sqrt{x}$ , $w : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *et* $t : x \longmapsto -5x + 10$ *sont continues sur* $]0, +\infty[$ *donc la fonction* $f = uv + w + t$ *est continue sur* $]0, +\infty[$.

   ♣ *La fonction $f$ est dérivable sur* $]0, +\infty[$, *et on a pour tout* $x \in ]0, +\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sqrt{x} - 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} - 5 \\ &= -2\sqrt{x} - \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} - 5 \\ &= -3\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} - 5 \end{aligned}$$

   *donc* $(\forall x \in ]0, +\infty[)$, $f'(x) = -3\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2} - 5$, *puisque* $(\forall x \in ]0, +\infty[)$, $f'(x) < 0$ *donc la fonction $f$ est strictement décroissante sur* $]0, +\infty[$.

*On a $f$ est continue et strictement décroissante sur* $]0,+\infty[$. *Alors*

$$f\left(]0,+\infty[\right)=\left]\lim_{x\longrightarrow+\infty}f\left(x\right),\lim_{x\longrightarrow0^+}f\left(x\right)\right[$$

$$\text{Or : }\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(-2x\sqrt{x}-5x\right)=-\infty\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{x}+10=10\end{array}\right\}\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow+\infty}f\left(x\right)=-\infty$$

$$\text{et }\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\longrightarrow0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\left(-2x\sqrt{x}-5x+10\right)=10\end{array}\right\}\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow0^+}f\left(x\right)=+\infty$$

*donc* $f\left(]0,+\infty[\right)=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

*puisque* $0\in f\left(]0,+\infty[\right)$ *donc l'équation* $f\left(x\right)=0$ *admet une seule solution* $\alpha$ *sur* $]0,+\infty[$. *D'où l'équation* $-2x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}-5x=10$ *admet une seule solution* $\alpha$ *sur* $]0,+\infty[$.

2. *Vérifions que :* $1,4<\alpha<1,5$

   *La fonction $f$ est continue sur* $[1,4;1,5]$ *et* $\left\{\begin{array}{c}f\left(1,4\right)\simeq0,4\\ \\ f\left(1,5\right)\simeq-0,58\end{array}\right.$ *donc* $f\left(1,4\right)\times f\left(1,5\right)<0$ *d'où d'après le théorème des valeurs intermédiares :*

$$1,4<\alpha<1,5$$

3. *Résolvons dans* $]0,+\infty[$ *l'inéquation* $(I)$ : $2x\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+5x-10<0$.

   *Soit* $x\in]0,+\infty[$, *on a*

$$\begin{array}{rcl}(I)&\Longleftrightarrow&-2x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}-5x+10>0\\ &\Longleftrightarrow&f\left(x\right)>0\\ &\Longleftrightarrow&f\left(x\right)>f\left(\alpha\right)\quad/\quad f\left(\alpha\right)=0\\ &\Longleftrightarrow&0<x<\alpha\end{array}$$

   *donc l'ensemble des solutions de l'inéquation* $(I)$ *est :*

$$S=]0,\alpha[$$

**EXERCICE 11** .

1. *Montrons que l'équation* $x^5+4x^3+5x-7=0$ *admet une unique solution* $\alpha\in\mathbb{R}$

   *On considère la fonction $f$ définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f\left(x\right)=x^5+4x^3+5x-7$.

   ♣ *La fonction $f$ est continue sur* $\mathbb{R}$. *(car c'est une fonction polynôme)*

♣ *On a* $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ f'(x) = 5x^4+12x^2+5$ *puisque* $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ f'(x) > 0$ *donc la fonction* $f$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

*On a* $f$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *donc*

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty,+\infty[) = \left]\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)\,,\ \lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)\right[ = ]-\infty,+\infty[ = \mathbb{R}$$

*car* $\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^5 = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^5 = -\infty \end{cases}$

*puisque* $0 \in f(\mathbb{R})$ *donc l'équation* $f(x) = 0$ *admet une seule solution* $\alpha$ *dans* $\mathbb{R}$.
*D'où* $x^5 + 4x^3 + 5x - 7 = 0$ *l'équation admet une seule solution* $\alpha$ *dans* $\mathbb{R}$.

2. *Vérifions que* : $0,840 < \alpha < 0,841$

*La fonction* $f$ *est continue sur* $[0,840; 0,841]$ *et* $\begin{cases} f(0,840) \simeq -0,01 \\ \\ f(0,841) \simeq 0,005 \end{cases}$ *donc* $f(0,840) \times f(0,841) < 0$ *d'où d'après le théorème des valeurs intermédiares* :

$$0,840 < \alpha < 0,841$$

**EXERCICE 12** .

*Soit* $f$ *une fonction définie sur* $]-\infty,0]$ *par :* $f(x) = -3x^2 + 3x + 1$

1. *Montrons que* $f$ *admet une fonction réciproque.*

♣ *La fonction* $f$ *est continue sur* $]-\infty,0]$ *car c'est la restriction d'une fonction polynôme.*

♣ *On a* $(\forall x \in ]-\infty,0])\,,\ f'(x) = -6x + 3$.

$$f'(x) = 0 \iff -6x+3 = 0 \iff -6x = -3 \iff x = \frac{1}{2} \notin ]-\infty,0]$$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $-6x+3$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f'(x)$ | $+$ | | | |

*donc* $(\forall x \in ]-\infty,0])\,,\ f'(x) > 0$. *D'où* $f$ *est strictement croissante sur* $]-\infty,0]$.

*Puisque* $f$ *est continue et strictement croissante sur* $]-\infty,0]$ *alors elle admet une fonction réciproque* $f^{-1}$ *définie sur l'intervalle* $J$ *avec* $J = f(I)$.

*On a*

$$J = f(I) = f(]-\infty,0]) = \left]\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)\,,\ f(0)\right] = ]-\infty,1]$$

2. *Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$ :*

*Soit $x \in \left]-\infty, 1\right]$ et $y \in \left]-\infty, 0\right]$ avec $y = f^{-1}(x)$.*

*On a*

$$\begin{aligned}
y &= f^{-1}(x) \\
&\Longleftrightarrow f(y) = x \\
&\Longleftrightarrow -3y^2 + 3y + 1 = x \\
&\Longleftrightarrow -3y^2 + 3y = x - 1 \\
&\Longleftrightarrow -3\left(y^2 - y\right) = x - 1 \\
&\Longleftrightarrow y^2 - y = \frac{1-x}{3} \\
&\Longleftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1-x}{3} \qquad / \quad X^2 - aX = \left(X - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
&\Longleftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1-x}{3} + \frac{1}{4} \\
&\Longleftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7-4x}{12} \\
&\Longleftrightarrow \left|y - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{\frac{7-4x}{12}} \\
&\Longleftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\frac{7-4x}{12}} \qquad / \quad \left|y - \frac{1}{2}\right| = -\left(y - \frac{1}{2}\right) \\
&\Longleftrightarrow y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7-4x}{12}}
\end{aligned}$$

*donc*

$$\left(\forall x \in \left]-\infty, 1\right]\right), \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7-4x}{12}}$$

**EXERCICE 13** .

*Soit $f$ une fonction définie sur $\left[2, +\infty\right[$ par : $f(x) = \sqrt{x-2} + x + 1$.*

1. *Montrons que $f$ admet une fonction réciproque.*

   ♣ *La fonction $u : x \longmapsto x - 2$ est continue et positive sur $\left[2, +\infty\right[$ donc la fonction $v = \sqrt{u}$ est continue sur $\left[2, +\infty\right[$ et comme la fonction $w : x \longmapsto x+1$ est continue sur $\left[2, +\infty\right[$ d'où la fonction $f = v + w$ est continue sur $\left[2, +\infty\right[$.*

   ♣ *La fonction $f$ est dérivable sur $\left]2, +\infty\right[$, et $\left(\forall x \in \left[2, +\infty\right[\right)$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} + 1$*

   *donc $\left(\forall x \in \left]2, +\infty\right[\right)$, $f'(x) > 0$, d'où la fonction $f$ est strictement croissante sur $\left[2, +\infty\right[$.*

   *Puisque $f$ est continue et strictement croissante sur $\left[2, +\infty\right[$ alors $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur l'intervalle $J$ avec $J = f(I)$.*

*On a*

$$J = f(I) = f([2,+\infty[) = \left[f(2), \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)\right[ = [3,+\infty[$$

2. *Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$ :*

   *Soit $x \in [3,+\infty[$ et $y \in [2,+\infty[$ avec $y = f^{-1}(x)$*

   *On a*

$$\begin{array}{rcl} y & = & f^{-1}(x) \\ & \Longleftrightarrow & f(y) = x \\ & \Longleftrightarrow & \sqrt{y-2} + y + 1 = x \\ & \Longleftrightarrow & \sqrt{y-2} + y - 2 = x - 3 \\ & \Longleftrightarrow & \left(\sqrt{y-2}\right)^2 + \sqrt{y-2} = x - 3 \\ & \Longleftrightarrow & \left(\sqrt{y-2} + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = x - 3 \\ & \Longleftrightarrow & \left(\sqrt{y-2} + \dfrac{1}{2}\right)^2 = x - 3 + \dfrac{1}{4} \\ & \Longleftrightarrow & \left(\sqrt{y-2} + \dfrac{1}{2}\right)^2 = x - \dfrac{11}{4} \\ & \Longleftrightarrow & \sqrt{y-2} + \dfrac{1}{2} = \sqrt{x - \dfrac{11}{4}} \\ & \Longleftrightarrow & \sqrt{y-2} = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{x - \dfrac{11}{4}} \\ & \Longleftrightarrow & y - 2 = \left(-\dfrac{1}{2} + \sqrt{x - \dfrac{11}{4}}\right)^2 \\ & \Longleftrightarrow & y = 2 + \left(-\dfrac{1}{2} + \sqrt{x - \dfrac{11}{4}}\right)^2 \end{array}$$

   *donc*

$$(\forall x \in [3,+\infty[), \ f^{-1}(x) = 2 + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{11}{4}}\right)^2$$

**EXERCICE 14** .

1. *Déterminons $a$ et $b$ pour que : $(\forall x \in \mathbb{R}), \ x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + ax + b)$.*

   *Soit $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$(x-3)\left(x^2 + ax + b\right) = x^3 + (a-3)x^2 + (b-3a)x - 3b$$

*donc* $x^3+(a-3)x^2+(b-3a)x-3b = x^3-3x-18$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} a-3=0 \\ b-3a=-3 \\ -3b=-18 \end{cases} \iff \begin{cases} a=3 \\ b=-3+3a \\ b=\dfrac{-18}{-3}=6 \end{cases} \iff \begin{cases} a=3 \\ b=6 \end{cases}$$

*donc*

$$(\forall x\in\mathbb{R}),\, x^3-3x-18=(x-3)\left(x^2+3x+6\right)$$

2. *Soit* $t$ *le réel défini par :* $t=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

**a)** *Montrons que* $t$ *est une solution de l'équation* $x^3-3x-18=0$ *dans* $\mathbb{R}$.

*On a*

$$\begin{aligned} t^3 &= \left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)^3 \\ &= \left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\right)^2\left(\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)+3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)^2+ \\ &\quad \left(\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\right)^3 \\ &= 9+4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}+3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}\left(\underbrace{\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}}_{=t}\right) \\ &= 18+3\sqrt[3]{81-80}\times t \\ &= 18+3t \end{aligned}$$

*d'où* $t^3-3t-18=0$ *ainsi* $t$ *est solution de l'équation* $x^3-3x-18=0$.

**b)** *On déduit que :* $t=3$.

*On a*

$$\begin{aligned} t^3-3t-18 &= 0 \\ &\iff (t-3)\left(t^2+3t+6\right)=0 \\ &\iff t-3=0 \quad ou \quad \underbrace{t^2+3t+6=0}_{\Delta \text{ est négatif}} \\ &\iff t=3 \end{aligned}$$

*donc*

$$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=3$$

Pr : **Yahya MATIOUI**

**www.etude – generale.com**