Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Correction de la série

EXERCICE 1 .

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\infty, 0]$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x^2+1}$

1. .

- *La fonction f est continue sur $]-\infty, 0]$ car c'est la la restriction d'une fonction rationnelle.*
- *La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0]$ et pour tout $x \in]-\infty, 0]$:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(2x^2+1) - 4x(x^2+2)}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^3+2x-4x^3-8x}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{-6x}{(2x^2+1)^2} \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in]-\infty, 0])\,,\ \ f'(x) = \dfrac{-6x}{(2x^2+1)^2}.$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-6x$ sur $]-\infty, 0]$ $\Big($car $(\forall x \in]-\infty, 0])\,,\ \ (2x^2+1)^2 > 0\Big)$.
Donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-6x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0		

d'où : $(\forall x \in]-\infty, 0])\,,\ \ f'(x) \geq 0$ *(f' s'annule uniquement en 0). Alors f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.*

Puisque f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$.

On a

$$J = f(]-\infty, 0]) = \left]\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x)\,, f(0)\right] = \left]\frac{1}{2}, 2\right]$$

2. Le tableau de variations de f^{-1}.

La fonction f^{-1} est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{2}, 2\right]$.

x	$\frac{1}{2}$		2
f^{-1}	$-\infty$	$\nearrow$	0

3. Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$:

Soit $x \in \left]\frac{1}{2}, 2\right]$ *et* $y \in \left]-\infty, 0\right]$ *avec* $y = f^{-1}(x)$.

On a

$$\begin{aligned} y &= f^{-1}(x) \iff f(y) = x \\ &\iff \frac{y^2+2}{2y^2+1} = x \\ &\iff y^2+2 = x\left(2y^2+1\right) \\ &\iff y^2+2 = 2xy^2+x \\ &\iff y^2-2xy^2 = x-2 \\ &\iff y^2(1-2x) = x-2 \\ &\iff y^2 = \frac{x-2}{1-2x} \\ &\iff |y| = \sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} \\ &\iff y = -\sqrt{\frac{x-2}{1-2x}} \\ &\iff y = -\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}} \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\forall x \in \left]\frac{1}{2}, 2\right]\right), \quad f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}}$$

EXERCICE 2 .

On considère la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

1. *L'ensemble de définition de la fonction f.*

$$\begin{aligned}D_f &= \{x\in\mathbb{R}/\ x+1\geq 0 \quad et \quad x-1\geq 0\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}/\ x\geq -1\ \ et\ x\geq 1\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}/\ x\geq 1\}\\ &= [1,+\infty[\end{aligned}$$

2. *Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\end{aligned}$$

comme $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=+\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ *donc*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=0$$

3. *Montrons que f est une bijection de D_f sur un intervalle J :*

- *La continuité*
  La fonction $u : x\longmapsto x+1$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ donc la fonction $v=\sqrt{u}$ est continue sur $[1,+\infty[$, et comme la fonction $x\longmapsto x-1$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ alors la fonction $w : x\longmapsto\sqrt{x-1}$ est continue sur $[1,+\infty[$ de plus la fonction $t=-w$ est continue sur $[1,+\infty[$. D'où la fonction $f=v+t$ est continue sur $[1,+\infty[$.
- *La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pout tout $x\in\,]1,+\infty[$:*

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\\ &= \frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)}{2\sqrt{x^2-1}}\\ &= \frac{-2}{2\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}\end{aligned}$$

donc $(\forall x\in\,]1,+\infty[)$, $f'(x)<0$. *D'où f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.*

Puisque la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ alors elle est bijective de I sur l'intervalle $J=f(I)$.

On a

$$J=f([1,+\infty[)=\left]\lim_{x\longrightarrow+\infty}f(x),f(1)\right]=\left]0,\sqrt{2}\right].$$

4. *Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$:*

   Soit $x \in \left]0, \sqrt{2}\right]$ et $y \in [1, +\infty[$ avec $y = f^{-1}(x)$.

   On a

$$\begin{aligned} y &= f^{-1}(x) \iff f(y) = x \\ &\iff \sqrt{y+1} - \sqrt{y-1} = x \\ &\iff \sqrt{y+1} = x + \sqrt{y-1} \\ &\iff y+1 = x^2 + 2x\sqrt{y-1} + y - 1 \\ &\iff 2 - x^2 = 2x\sqrt{y-1} \\ &\iff \left(2-x^2\right)^2 = 4x^2(y-1) \\ &\iff \left(2-x^2\right)^2 = 4x^2y - 4x^2 \\ &\iff 4x^2y = \left(2-x^2\right)^2 + 4x^2 \\ &\iff y = \frac{\left(2-x^2\right)^2 + 4x^2}{4x^2} \end{aligned}$$

   Donc

$$\left(\forall x \in \left]0, \sqrt{2}\right]\right), \quad f^{-1}(x) = \frac{\left(2-x^2\right)^2 + 4x^2}{4x^2}$$

EXERCICE 3 .

On considère la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$

1. *Montrons que f est continue sur $]-2, +\infty[$.*

   La fonction $u : x \longmapsto x+2$ est continue et strictement positive sur $]-2, +\infty[$ donc $v = \sqrt{u}$ est continue sur $]-2, +\infty[$ et comme la fonction $w : x \longmapsto x$ est continue sur $]-2, +\infty[$ d'où la fonction $f = \dfrac{w}{v}$ est continue sur $]-2, +\infty[$.

2. *La fonction f est dérivable sur $]-2, +\infty[$ et pour tout $x \in]-2, +\infty[$:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x+2} - x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}{x+2} \\ &= \frac{2(x+2) - x}{2(x+2)\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{x+4}{2(x+2)\sqrt{x+2}} \end{aligned}$$

   Donc

$$(\forall x \in]-2, +\infty[), \quad f'(x) = \frac{x+4}{2(x+2)\sqrt{x+2}}$$

3. *Montrons que f est une bijection de $]-2, +\infty[$ sur un intervalle J.*

■ *La fonction f est continue sur* $]-2,+\infty[$.

■ *On a :* $(\forall x \in]-2,+\infty[)\,,\;\; f'(x) = \dfrac{x+4}{2(x+2)\sqrt{x+2}}$

Le signe de $f'(x)$ *sur* $]-2,+\infty[$ *est celui de* $x+4$ $\left(car\;\; (\forall x \in]-2,+\infty[)\,,\;\; 2(x+2)\sqrt{x+2} > 0\right)$

x	$-\infty$	-4		-2		$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$			
$f'(x)$					$+$	

Donc $(\forall x \in]-2,+\infty[)\,,\;\; f'(x) > 0$. *D'où la fonction f est strictement croissante sur* $]-2,+\infty[$.

Puisque la fonction f est continue et strictement croissante sur $]-2,+\infty[$ *alors elle est bijective de I sur l'intervalle* $J = f(I)$.

On a

$$J = f(]-2,+\infty[) = \left]\lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x)\,,\; \lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}.$$

EXERCICE 4 .

1. *Montrons que f est une bijection de* $[1,+\infty[$ *sur un intervalle J.*

■ *Les fonctions* $u : x \longmapsto x$ *et* $v : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *sont continues sur* $[1,+\infty[$ *donc la fonction* $f = u + v$ *est continue sur* $[1,+\infty[$.

■ *La fonction f est dérivable sur* $[1,+\infty[$, *et pour tout* $x \in [1,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x^2-1}{x^2} \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in [1,+\infty[)\,,\; f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$.
Le signe de $f'(x)$ *sur* $[1,+\infty[$ *est celui de* x^2-1 $(car\;\; (\forall x \in [1,+\infty[)\,,\;\; x^2 > 0)$.
Donc

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x2-1$	$+$		0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$					0	$+$	

D'où $(\forall x \in [1,+\infty[)\,,\; f'(x) \geq 0$ $(f'$ *s'annule uniquement en* $1)$. *Alors f est strictement croissante sur* $[1,+\infty[$.

Puisque la fonction f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ alors elle est bijective de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

On a

$$J = f([1,+\infty[) = \left[f(1), \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)\right[= [2,+\infty[.$$

2. *Déterminons $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$:*

   Soit $x \in [2,+\infty[$ et $y \in [1,+\infty[$ avec $y = f^{-1}(x)$

   On a

$$\begin{aligned}
y &= f^{-1}(x) \iff f(y) = x \\
&\iff y + \frac{1}{y} = x \\
&\iff \frac{y^2+1}{y} = x \\
&\iff y^2 + 1 = xy \\
&\iff y^2 - xy = -1 \\
&\iff \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = -1 \quad / \quad X^2 - aX = \left(X - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
&\iff \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2-4}{4} \\
&\iff \left|y - \frac{x}{2}\right| = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} \\
&\iff y - \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2} \quad ou \quad y - \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} \\
&\iff y = \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} \quad ou \quad y = \frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}
\end{aligned}$$

   Recherche de l'expression adéquaté :

   On a $f(2) = \frac{5}{2}$ donc $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 2$. On remplace x par $\frac{5}{2}$ dans l'expression $\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$ on obtient :

$$\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4}}{2} = 2$$

   On remplace x par $\frac{5}{2}$ dans l'expression $\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}$ on obtient :

$$\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2} = \frac{\frac{5}{2} - \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4}}{2} = \frac{1}{2}$$

   Or $\frac{1}{2} \neq 2$ donc $\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}$ n'est pas la bonne solution.

Donc

$$(\forall x \in [2,+\infty[)\,,\ f^{-1}(x) = \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com