Dérivation et étude des fonctions

Dérivabilité d'une fonction numérique (Rappels)

Dérivabilité d'une fonction en un point

Définition 1 .

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I. On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$. Le nombre ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f en x_0. Il est noté $f'(x_0)$.

Exemple 2 .

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$

Étudier la dérivabilité de f en $x_0=-2$.

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} &= \lim_{x\longrightarrow -2}\frac{\dfrac{1}{x^2+2}-\dfrac{1}{6}}{x+2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -2}\frac{\dfrac{6-(x^2+2)}{6(x^2+1)}}{x+2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -2}\frac{6-x^2-2}{6(x^2+1)(x+2)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -2}\frac{4-x^2}{6(x^2+1)(x+2)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -2}\frac{(2-x)(2+x)}{6(x^2+1)(x+2)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -2}\frac{(2-x)}{6(x^2+1)}\\
&= \frac{2+2}{6(4+1)}=\frac{2}{15}
\end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable en $x_0=-2$ et on a $f'(-2)=\dfrac{2}{15}$.

Remarque 3 .

Un simple changement d'écriture montre, en s'appuyant sur la composition des limites, que f est dérivable en x_0 si la fonction $h : x\longmapsto\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a une limite finie en 0 et alors $f'(x_0)=\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Propriété 4 .

Soit f une fonction dérivable en un point x_0.

Une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f au point $A(x_0, f(x_0))$ est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Exemple 5 .

Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2}$ au point $A(-2, f(-2))$.

On a $f(-2) = \dfrac{1}{6}$ et $f'(-2) = \dfrac{2}{15}$ (d'après l'exemple précédent). Donc, une équation de la tangente (T) est : $y = \dfrac{2}{15}(x+2) + \dfrac{1}{6}$ c-à-d $(T) : y = \dfrac{2}{15}x + \dfrac{13}{30}$.

Dérivabilité à droite - Dérivabilité à gauche

Définition 6 .

♣ *Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0, x_0 + r[$ où $r \in]0, +\infty[$.*

On dit que f est dérivable à droite de x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$. Le nombre ℓ est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en x_0. Il est noté $f'_d(x_0)$.

♣ *Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0 - r, x_0]$ où $r \in]0, +\infty[$.*

On dit que f est dérivable à gauche de x_0 s'il existe un réel ℓ' tel que : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell'$. Le nombre ℓ' est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en x_0. Il est noté $f'_g(x_0)$.

Propriété 7 .

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I. La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 avec $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$, et alors

$$f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$$

Exemple 8 .

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = (x+3)^3 + 2 & si \quad x \geq -2 \\ f(x) = -(x+3)^2 + 4 & si \quad x < -2 \end{cases}$

Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de en $x_0 = -2$, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

♣ *La dérivabilité à gauche en $x_0 = -2$:*

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow -2^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} &= \lim_{x\longrightarrow -2^-}\frac{-(x+3)^2+4-3}{x+2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -2^-}\frac{-(x+3)^2+1}{x+2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -2^-}\frac{-\left((x+3)^2-1\right)}{x+2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -2^-}\frac{-(x+2)(x+4)}{x+2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -2^-} -(x+4) = -2
\end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable à gauche en $x_0 = -1$ et $f'_g(-2) = -2$.

On peut interpréter ce résultat graphiquement comme suit :

La courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche au point $M(-2,3)$ définie par $(T_g) : \begin{cases} y = -2x-1 \\ \\ x \leq -2 \end{cases}$

♣ *La dérivabilité à droite en $x_0 = -2$:*

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow -2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} &= \lim_{x\longrightarrow -2^+}\frac{(x+3)^3+2-3}{x+2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -2^+}\frac{(x+3)^3-1}{x+2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -2^+}\frac{(x+2)\left[(x+3)^2+(x+3)+1\right]}{x+2}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -2^+}(x+3)^2+(x+3)+1 = 3
\end{aligned}$$

Donc la fonction f est dérivable à droite en $x_0 = -2$ et $f'_d(-2) = 3$.

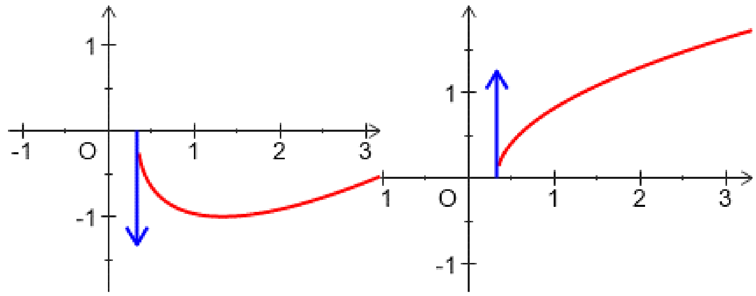
On peut interpréter ce résultat graphiquement comme suit :

La courbe représentative de f admet une demi-tangente à droite au point $M(-2,3)$ définie par $(T_d) : \begin{cases} y = 3x+9 \\ \\ x \geq -2 \end{cases}$.

Remarque 9 .

♣ Si f *n'est pas dérivable à droite* $\left(\text{c.à.d.} \lim_{x\longrightarrow x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty\right)$ *dans ce cas on a demi tangente à droite de x_0 parallèle à l'axe des ordonnées.*

♣ Si f *n'est pas dérivable à gauche* $\left(c.à.d.\ \lim\limits_{x\longrightarrow x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty\right)$ *dans ce cas on a demi tangente à gauche de* x_0 *parallèle à l'axe des ordonnées.*



Remarque 10 .

Si f *est dérivable à droite et à gauche de* x_0 *et* $f'_g(x_0)\neq f'_d(x_0)$ *alors* f *n'est pas dérivable en* x_0*. On dit que* $A(x_0, f(x_0))$ *est un point anguleux.*

Exemple 11 .

La fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=|x|$.

On a $f'_g(0)=-1$ *et* $f'_d(0)=1$, *donc* $f'_g(0)\neq f'_d(0)$ *par suite* f *n'est pas dérivable en* 0 *d'où le point* $O(0,0)$ *est un point anguleux.*

Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Définition 12 .

Soit f *une fonction définie sur un intervalle ouvert* I*. On dit que* f *est dérivable sur* I*, si* f *est dérivable en tout point* $x\in I$*. La fonction*

$$\begin{array}{rcccl} f' & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

est appelée la fonction dérivée de la fonction f.

Tableau des dérivées usuelles

La fonction f	La fonction f'	Domaine de dérivabilité
$x\longmapsto a\quad(a\in\mathbb{R})$	$x\longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x\longmapsto ax\ (a\in\mathbb{R})$	$x\longmapsto a$	$\mathbb{R}$
$x\longmapsto x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$x\longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x\longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x\longmapsto \dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x\longmapsto \sqrt{x}$	$x\longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x\longmapsto \sin x$	$x\longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x\longmapsto \cos x$	$x\longmapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x\longmapsto \tan x$	$x\longmapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
$x\longmapsto \sin(ax+b)\quad(a,b\in\mathbb{R})$	$x\longmapsto a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$x\longmapsto \cos(ax+b)\quad(a,b\in\mathbb{R})$	$x\longmapsto -a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 13 .

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(f+g)' = f' + g' \quad , \quad (\alpha f)' = \alpha f' \quad , \quad (f.g)' = f'.g + g'.f \quad , \quad (f^n)' = nf'.f^{n-1}$$

Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors : $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$ *et* $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}$.

Enfin, si f est strictement positive sur I alors : $\left(\sqrt{f}\right)' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Exemple 14 .

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + x\sqrt{x}$.

Les fonctions $u : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $v : x \longmapsto x$ et $w : x \longmapsto \sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc la fonction $f = u + v \times w$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Soit $x \in \left]0,+\infty\right[$, on a

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{x^2} + \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

donc

$$\left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right),\ f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

Exemple 15 .

Déterminons la fonction dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

On cherche D_f :

On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R}/\ x^2 - x + 1 \geq 0\}$ et comme le discriminant Δ du trinôme $x^2 - x + 1$ est -3 donc $(\forall x \in \mathbb{R})$, $x^2 - x + 1 > 0$. D'où $D_f = \mathbb{R}$.

On a la fonction $u : x \longmapsto x^2 - x + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{\left(x^2 - x + 1\right)'}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

Compléments sur la dérivation

Dérivabilité et continuité

Propriété 16 .

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Remarque 17 .

- ♣ *Une conséquence immédiate de la propriété est la suivante : toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.*
- ♣ *La réciproque de la propriété est fausse. Par exemple, la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.*

Dérivée de la fonction composée

Propriété 18 .

Soit I et J deux intervalles ouverts, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions numériques avec $f(I) \subset J$. Soit x_0 un élément de I. Si :

♣ *la fonction f est dérivable en x_0*

♣ *la fonction g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$*

alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et de plus :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Corollaire 19 .

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et de plus, pour tout $x \in I$:

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Exemple 20 .

On considère la fonction U définie sur $\mathbb{R}$ par : $U(x) = \cos\left(\sqrt{x^2+5}\right)$.

En posant : $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ et $g(x) = \cos x$.On aura pour tout $x \in \mathbb{R}$: $U(x) = (g \circ f)(x)$

Puisque f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ alors la fonction $U = g \circ f$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$U'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \times \sin\left(\sqrt{x^2+5}\right) = \frac{-x\sin\left(\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{x^2+5}}$$

Dérivée de la fonction réciproque

Propriété 21 .

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et de plus :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.$$

Exemple 22 .

Soit f la fonction numérique définie sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = x\sin x$

La fonction f est dérivable sur I en tant que produit de deux fonctions dérivables sur I et on a $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $f'(x) = \sin x + x\cos x$, puisque $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Par suite la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle $J = f(I)$ avec

$$J = f(I) = \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] = I.$$

On a $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{12}$ *et* $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{6+\pi\sqrt{3}}{12}$. *Or* $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\neq 0$ *donc la fonction* f^{-1} *est dérivable en* $\frac{\pi}{12}$ *et on a :*

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{12}{6+\pi\sqrt{3}}$$

Remarque 23 .

♣ *Si* $f'(x_0)=0$, *alors la fonction* f^{-1} *n'est pas dérivable en* y_0 *et sa courbe représentative possède une tangente verticale en* y_0.

♣ *Si* f *est dérivable sur* I *et si pour tout* $x\in I$, $f'(x)\neq 0$ *alors* f^{-1} *est dérivable sur* $J=f(I)$.

Dérivée de la fonction racine n^{ème}

Propriété 24 .
Soit n *un entier naturel supérieur ou égal à* 2.

♣ *La fonction* $x\longmapsto\sqrt[n]{x}$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et on a pour tout* $x\in]0,+\infty[$:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

♣ *Si* u *est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *alors la fonction* $x\longmapsto\sqrt[n]{x}$ *est dérivable sur* I *et sa fonction dérivée est donnée par :*

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'=\frac{1}{n}u'(x)\left(u(x)\right)^{\frac{1}{n}-1}=\frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$$

Exemple 25 .

1. *La fonction* $x\longmapsto\sqrt[3]{x}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et on a pour tout* $x\in\mathbb{R}_+^*$: $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
2. *On considère la fonction* f *définie par :* $f(x)=\sqrt[3]{8x-5}$
   La fonction $u:x\longmapsto 8x-5$ *est dérivable et strictement positive sur l'intervalle* $\left]\frac{5}{8},+\infty\right[$. *Par conséquent la fonction* f *est dérivable sur* $\left]\frac{5}{8},+\infty\right[$ *et on a pour tout* $x\in\left]\frac{5}{8},+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{1}{3}u'(x)\left(u(x)\right)^{\frac{1}{3}-1}=\frac{8}{3}(8x-5)^{\frac{-2}{3}}=\frac{8}{3.\sqrt[3]{(8x-5)^2}}$$

3. *On considère la fonction g définie par :* $g(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$

   La fonction $x \longmapsto x^2+x+1$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et strictement positive sur* $\mathbb{R}$. $($*Le discriminant* $\Delta < 0$ *et* $a > 0)$. *Donc* g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$g'(x) = \frac{\left(x^2+x+1\right)'}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}} = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$$

   donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ g'(x) = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$$

4. *On considère la fonction h définie par :* $h(x) = x\sqrt[3]{x} + x^3\sqrt{x}$

   Les fonctions $x \longmapsto \sqrt{x}$ *et* $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ *sont dérivables sur* $]0,+\infty[$. *Donc* f *est dérivable sur* $]0,+\infty[$.

   Soit $x \in]0,+\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sqrt[3]{x} + x \times \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3x^2\sqrt{x} + x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3\sqrt[3]{x^3}+x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3x^2 \times 2\sqrt{x^2}+x^3}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3x+x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6x^3+x^3}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{7x^3}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{4\sqrt[3]{x^3}}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{7x^2\sqrt{x^2}}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{4\sqrt[3]{x}}{3} + \frac{7x^2\sqrt{x}}{2}
\end{aligned}$$

Propriété 26 .

Soit r un nombre rationnel non nul.

♣ *La fonction* $x \longmapsto x^r$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et sa dérivée est la fonction* $x \longmapsto r.x^{r-1}$

♣ *Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de* $\mathbb{R}$ *alors la fonction* $x \longmapsto (u(x))^r$ *est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :*

$$\left(u(x)^r\right)' = r.u'(x).(u(x))^{r-1}$$

Exemple 27 .

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \left(x^2-x+5\right)^{\frac{-7}{8}}$

La fonction $x \longmapsto x^2 - x + 5$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\left(x^2 - x + 5\right)^{\frac{-7}{8}}\right)' = \frac{-7}{8}(2x-1)\left(x^2 - x + 5\right)^{\frac{-7}{8}-1} = \frac{-7(2x-1)}{8\sqrt[8]{\left(x^2 - x + 5\right)^{15}}}$$

Étude des fonctions numériques (Rappels)

Monotonie d'une fonction numérique

Propriété 28 .

Soit f une fonction dérivable sur I.

♣ *f est croissante sur I si et seulement si $(\forall x \in I)$, $f'(x) \geq 0$.*

♣ *f est décroissante sur I si et seulement si $(\forall x \in I)$, $f'(x) \leq 0$.*

♣ *f est constante sur I si et seulement si $(\forall x \in I)$, $f'(x) = 0$.*

Remarque 29 .

♣ *Si $f' \geq 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I.*

♣ *Si $f' \leq 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante sur I.*

Exemple 30 .

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x + 1$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$f'(x) = 15\left(x^4 - 2x^2 + 1\right) = 15\left(x^2 - 1\right)^2$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f'(x) \geq 0$, comme la fonction f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 31 .

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 4(-x-1)$.

Donc le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est celui de $-x-1$, d'où le tableau de signe de f' est le suivant

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

♣ $(\forall x \in]-\infty,-1])$, $f'(x) \geq 0$, *comme la fonction* f' *ne s'annule qu'un nombre fini de points alors* f *est strictement croissante sur* $]-\infty,-1]$.

♣ $(\forall x \in [-1,+\infty[)$, $f'(x) \leq 0$, *comme la fonction* f' *ne s'annule qu'un nombre fini de points alors* f *est strictement décroissante sur* $[-1,+\infty[$.

Exemple 32 .

Soit f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$.
Donner le tableau de variation de f.
La fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et on a* $f'(x) = 3(-x^2 + 2x + 3)$.
Donc le signe de $f'(x)$ *sur* $\mathbb{R}$ *est le signe du trinôme* $-x^2 + 2x + 3$.
On a $\Delta = 4 - 4 \times (-1) \times 3 = 16 > 0$ *donc*

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \iff x = 3 \quad ou\ x = -1$$

on déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	-7	↗	25	↘	$-\infty$

Exemple 33 .

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ *par* $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$.

1. *Déterminer les limites de la fonction* f *aux bornes de* D_f.
2. *Calculer* $f'(x)$ *puis dresser le tableau de variation de* f.

♠ *On a* $D_f =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

♣
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

♣
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

♣
$$\lim_{x\longrightarrow1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$$

♣
$$\lim_{x\longrightarrow1^6} f(x) = \lim_{x\longrightarrow1^6} \frac{x+2}{x-1} = -\infty$$

♠ *La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et on a*

$$f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

donc $(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\})\,,\ f'(x)<0,$ *d'où*

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
f	$1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 1$

Axe de symétrie et centre Centre de symétrie

Propriété 34 .

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur un ensemble D et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

♣ *La droite (Δ) d'équation $x=a$ $\ (a\in\mathbb{R})$ est un axe de symétrie de la courbe (C) si et seulement si :*
$$\begin{cases}(\forall x\in D)\,,\ \ (2a-x)\in D\\ \\ (\forall x\in D)\,,\ f(2a-x)=f(x)\end{cases}$$

♣ *Le point $\Omega(a,b)$ $(a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$ est un centre de symétrie de la courbe (C) si et seulement si :*
$$\begin{cases}(\forall x\in D)\,,\ \ (2a-x)\in D\\ \\ (\forall x\in D)\,,\ f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$$

Exemple 35 .

On considère la fonction f définie par : $\quad f(x)=\dfrac{2x^2-4x+3}{x^2-2x}$
Montrons que la droite (Δ) d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f).
L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x\in D_f &\iff x\neq 0 \ \text{ et } x\neq 2\\ &\iff -x\neq 0 \ \text{ et } \ -x\neq -2\\ &\iff 2-x\neq 2 \ \text{ et } \ 2-x\neq 0\\ &\iff (2-x)\in D_f\end{aligned}$$

D'autre part, soit $x \in D_f$, on a

$$\begin{aligned} f(2-x) &= \frac{2(2-x)^2 - 4(2-x) + 3}{(2-x)^2 - 2(2-x)} \\ &= \frac{2(4-4x+x^2) - 8 + 4x + 3}{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x} \\ &= \frac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Par suite la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f).

Exemple 36 .

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1}$$

Montrons que $\Omega(1, 7)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f).
L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x \in D_f \iff x \neq 1 \iff -x \neq -1 \iff 2 - x \neq 1 \iff (2-x) \in D_f$$

Soit $x \in D_f$. Montrons que : $f(2-x) = 14 - f(x)$.
On a

$$\begin{aligned} f(2-x) &= \frac{2(2-x)^2 + 3(2-x) - 5}{(2-x) - 1} \\ &= \frac{2(4-4x+x^2) + 6 - 3x - 5}{-x + 1} \\ &= \frac{-2x^2 + 11x - 9}{x - 1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 14 - f(x) &= 14 - \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1} \\ &= \frac{14(x-1) - (2x^2 + 3x - 5)}{x - 1} \\ &= \frac{-2x^2 + 11x - 9}{x - 1}. \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in D_f), \quad f(2-x) = 14 - f(x).$$

Par suite le point $\Omega(1, 7)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f).

Remarque 37 .

Pour étudier une fonction définie sur un ensemble D, dont la courbe admet un axe de symétrie $x = a$ (un centre de symétrie $\Omega(a, b)$), il suffit d'étudier la fonction sur le domaine $D \cap [a, +\infty[$ et de conclure pour $D \cap]-\infty, a]$.

Concavité d'une courbe - Points d'inflexion

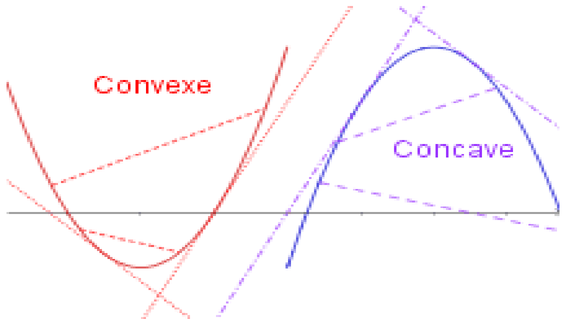
Concavité d'une courbe

Définition 38 .

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative dans un repère.

♣ *On dit que la courbe (C_f) est convexe si elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.*

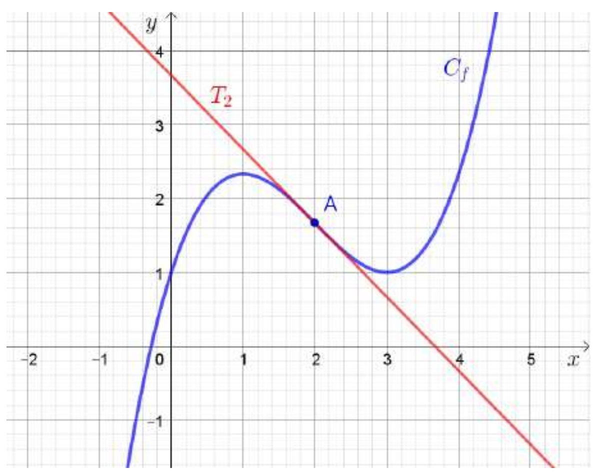
♣ *On dit que la courbe (C_f) est concave si elle est entièrement située dessous de chacune de ses tangentes.*



Points d'inflexion

Définition 39 .

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et (C) la courbe représentative de f, on dit que $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion si la courbe traverse sa tangente en ce point.

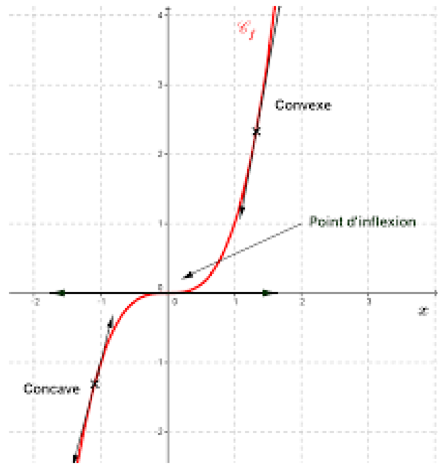


Remarque 40 .

Un point d'inflexion est un point de (C) où la courbe (C) change de concavité.

Exemple 41 .

On considère la figure qui présente le graphe d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.



La courbe (C_f) est convexe sur $[0,+\infty[$ et concave sur $]-\infty,0]$.

Le point $O(0,0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) la tangente T traverse la courbe (C_f) en $O(0,0)$.

Concavité et dérivée seconde

Propriété 42 .

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- ♣ *Pour que la courbe (C_f) de f soit convexe sur I, il faut et il suffit que :* $(\forall x \in I),\ f''(x) \geq 0$.

- ♣ *Pour que la courbe (C_f) de f soit concave sur I, il faut et il suffit que :* $(\forall x \in I),\ f''(x) \leq 0$.

- ♣ *Pour que le point $M_0(x_0, f(x_0))$ soit un point d'inflexion de la courbe (C_f), il faut et il suffit que la dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et change de signe de part et d'autre de x_0.*

Exemple 43 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \dfrac{2}{3}$.

1. *Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Étudier la concavité de la courbe (C) de f en précisant les deux points d'inflexion.*

- ♣ *f est une fonction polynôme, donc elle est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.*
  On a
  $$(\forall x \in \mathbb{R}),\ f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$
  et
  $$(\forall x \in \mathbb{R}),\ f''(x) = x^2 - 4$$

♣ *Étudions la concavité de (C) et déterminons les points d'inflexion.*

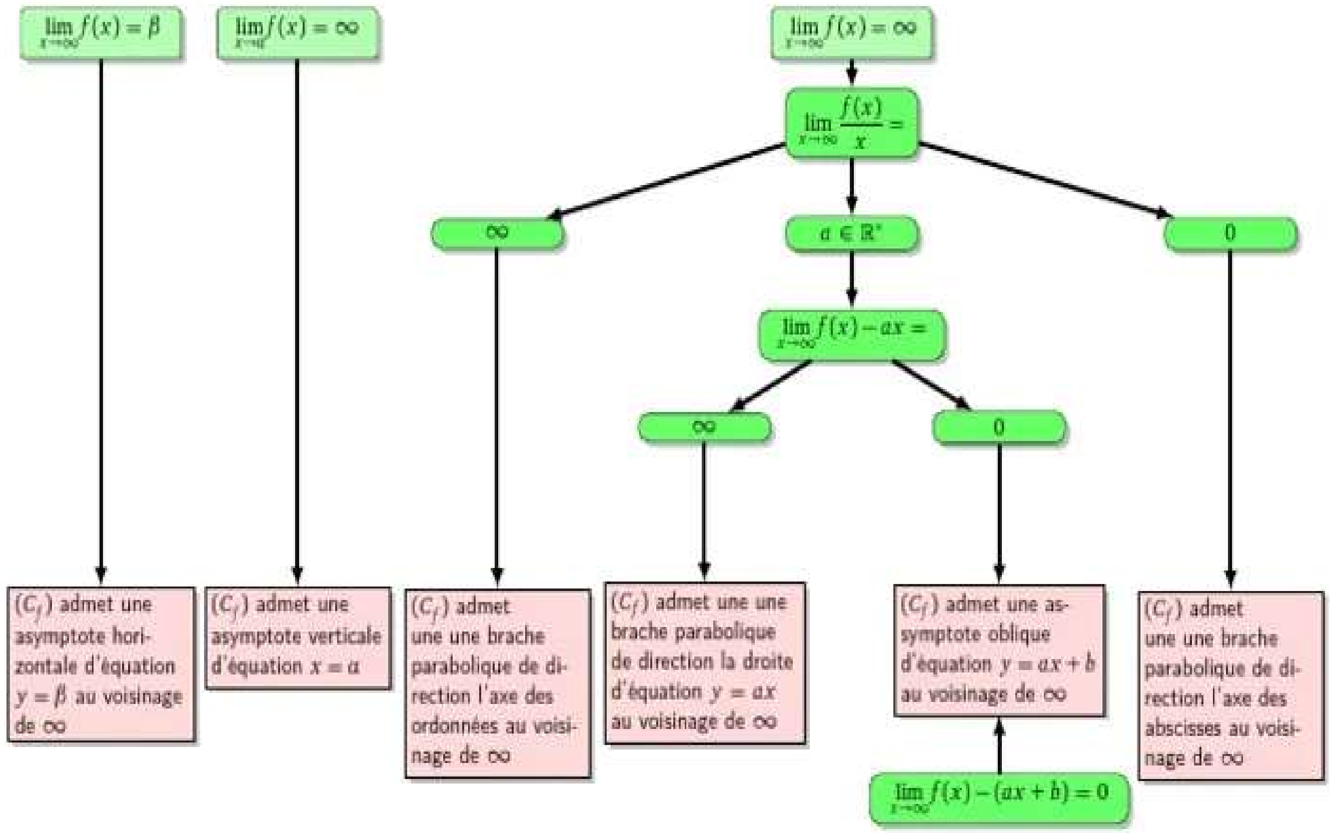
Étudions le signe de $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe de $f''(x)$, on déduit que :
La courbe (C) est convexe sur $]-\infty, -2]$ et sur $[2, +\infty[$. La courbe (C) est concave sur $[-2, 2]$.
f'' s'annule en changeant de signe en $x_0 = 2$ et $x_0 = -2$, donc les deux points $A(-2, f(-2))$ et $B(2, f(2))$ sont deux points d'inflexion de (C) c'est-à-dire $A(-2, -8)$ et $B(2, -4)$.

Étude des branches infinies (Rappel)



Organigramme pour étudier les branches infinies

1

Exemple 44 .

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par : $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$.

1. *Calculer* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.

2. *Calculer* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, *puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

♣ *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} 2 - \sqrt{x+1} = -\infty$.

♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2-\sqrt{x+1}}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x+1}}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2}{x}-\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

Exemple 45 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-2x^2$.

1. *Calculer $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)$.*

2. *Etudier la branche infinie de la courbe (C) de f au voisinage de $-\infty$.*

♣ *On a* $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=\lim_{x\longrightarrow-\infty} x^3-2x^2=\lim_{x\longrightarrow-\infty} x^3=-\infty$.

♣ *Calculons* $\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{f(x)}{x}$:

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x^3-2x^2}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} x^2-2x\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} x^2\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Donc la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

Exemple 46 .

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}-x$

1. *Calculer $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$.*

2. *Déterminer la branche infinie de la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$.*

♣ *On a* $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x}-x=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})=-\infty$.

♣ *Calculons :* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - x}{x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} - 1 \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \\
&= -1 \quad (a = -1)
\end{aligned}$$

Calculons $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) + x)$:

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

D'où la courbe (C) *de* f *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branche parabolique de direction la droite d'équation* $y = -x$.

Etude d'une fonction numérique

EXERCICE 47 .

Le plan est rapporté au repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Soit f *la fonction numérique définie par :* $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x + 1}$

1. *Déterminer* D_f *l'ensemble de définition de la fonction* f *et calculer les limites de* f *aux bornes des intervalles de* D_f.
2. **a)** *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

   b) *Dresser le tableau de variations de* f.
3. **a)** *Vérifier que :* $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x+1}$

   b) *Déterminer les branches infinies de la courbe de* f.

   c) *Déterminer la position relative de la courbe de* f *par rapport à la droite* (D) *d'équation :* $y = x + 2$.
4. *Montrer que le point* $I(-1, 1)$ *est un centre de symétrie de la courbe de* f.
5. **a)** *Déterminer le point d'intersection de la courbe de* f *avec l'axe des ordonnées.*

   b) *Déterminer l'équation de la tangente* (T) *à la courbe de la fonction* f *au point d'abscisse* 0.
6. *Tracer la courbe de* f.

7. **a)** *Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation* (E_m) :
$x^2 + (3-m)\,x + 6 - m = 0$
Discuter suivant les valeurs du paramètre m.

CORRECTION 48 .

1. *Déterminons* D_f *et calculons les limites de la fonction* f *aux bornes de* D_f :
On a $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x^2+3x+6}{x+1} = \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} x = -\infty\\ \lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^2+3x+6}{x+1} = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} x = +\infty\end{aligned}$$

On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow-1} x^2+3x+6 = 4$ *et* $\begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow-1^+} x+1 = 0^+\\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow-1^-} x+1 = 0^-\end{cases}$ *donc*

$$\lim_{x\longrightarrow-1^+} f(x) = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\longrightarrow-1^-} f(x) = -\infty$$

2. **a)** *Montrons que* : $(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}),\ f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.
La fonction f *est dérivable sur* $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, *on a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x+6)}{(x+1)^2}\\ &= \frac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x-6}{(x+1)^2}\\ &= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}\\ &= \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

donc

$$(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}),\ f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

b) *Tableau de variations de* f :
Le signe de $f'(x)$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ *est celui de* $(x-1)(x+3)$ $\big($*car* $(\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}),\ (x+1)^2 > 0\big)$

On a

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+3)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

3. **a)** *Vérifions que :* $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}), f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x+1}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$*, on a*

$$\begin{aligned} x + 2 + \frac{4}{x+1} &= \frac{(x+2)(x+1)+4}{x+1} \\ &= \frac{x^2 + x + 2x + 2 + 4}{x+1} \\ &= \frac{x^2+3x+6}{x+1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}), f(x) = x + 2 + \frac{4}{x+1}$$

b) *Déterminons les branches infinies de la courbe de f :*

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = -\infty$*, donc la droite d'équation* $x = -1$ *est une asymptote à la courbe de* f*.*

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{|x| \longrightarrow +\infty} (f(x) - (x+2)) = \lim\limits_{|x| \longrightarrow +\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0$*. Donc la droite* $(D) : y = x + 2$ *est une asymptote oblique à la courbe de* f *au voisinage de* $+\infty$ *et* $-\infty$*.*

c) *Déterminons la position relative de* (C_f) *avec la droite* $(D) : y = x + 2$ *:*

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$*,* *On a* $f(x) = x+2+\dfrac{4}{x+1}$ *alors* $f(x)-(x+2) = \dfrac{4}{x+1}$. *Donc le signe de* $f(x)-(x+2)$ *est celui de* $x+1$ *sur* D_f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-(x+2)$	$-$	$\|$	$+$

d'où

♣ *La courbe* (C_f) *est au-dessous de la droite* (D) *sur* $]-\infty,-1[$.

♣ *La courbe* (C_f) *est au-dessus de la droite* (D) *sur* $]1,+\infty[$.

4. *Montrons que le point* $I(-1,1)$ *est un point de symétrie de* (C_f) :

   On a d'une part :

$$x \in D_f \iff x \neq -1 \iff (-2-x) \neq -1 \iff (-2-x) \in D_f$$

   D'autre part, pour tout $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} f(2a-x) &= f(-2-x) = -2-x+2+\frac{4}{(-2-x)+1} \\ &= -x-\frac{4}{x+1} \end{aligned}$$

   et

$$2b-f(x) = 2-\left(x+2+\frac{4}{x+1}\right) = -x-\frac{4}{x+1}$$

   Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}),\ f(2a-x) = 2b-f(x) \quad \textit{avec} : a=-1 \textit{ et } b=1$$

   D'où le point $I(-1,1)$ *est un centre de symétrie de* (C_f).

5. **a)** *Déterminons l'intersection* (C_f) *avec* (C_y) :

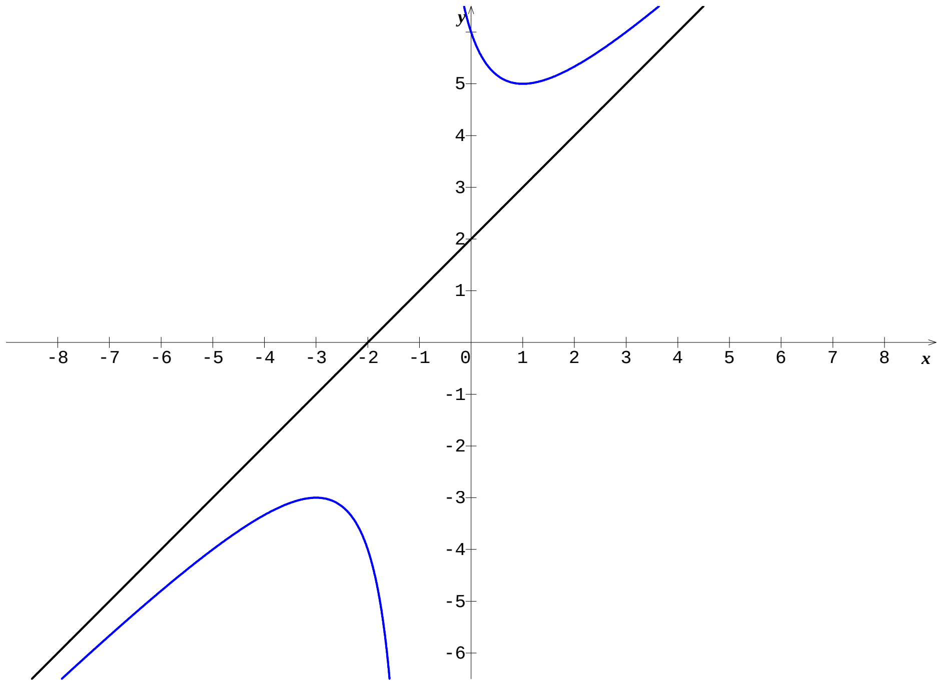
   On a $f(0)=6$ *donc* $(C_f)\cap(O_y) = \{A(0,6)\}$.

   b) *Équation de la tangente* (T) *en* A :

   On a $(T) : y = f'(0)(x-0)+f(0)$ *et comme* $f'(0)=-3$ *et* $f(0)=6$ *donc*

$$(T) : y = -3x+6$$

6. *Tracons* (C_f) :



7. *Graphiquement le nombre de solutions de l'équation* (E_m) *le nombre de points d'intersection de* (C_f) *avec la droite* $(D_m) : y = m$ *où* $m \in \mathbb{R}$.

   Le signe des solutions est celui des abscisses de ces points

♣ Si $m < -3$ *alors* (E_m) *admet deux solutions négatives.*

♣ $m = -3$ *alors la solution de* (E_m) *est* -3.

♣ Si $-3 < m < 5$ *pas de solution.*

♣ Si $m = 5$, *alors la solution de* (E_m) *est* 1.

♣ Si $5 < m < 6$ *alors* (E_m) *admet deux solutions positives.*

♣ Si $m = 6$ *alors* (E_m) *admet deux solutions l'une postive et l'autre* 0.

♣ Si $m > 6$ *alors* (E_m) *admet deux solutions de signes contraires.*

www.etude − generale.com