Logique et Raisonnements

Logique

Assertions (Propositions)

Définition 1 .
Tout énoncé mathématique qui a un sens qui est soit vrai, soit faux, est une proposition (ou assertion). Une proposition est notée : P, Q, R, S, ...etc

On désigne par V la valeur de vérité d'une proposition vraie et par F la valeur de vérité d'une proposition fausse.

Une table de vérité est une table qui indique si une proposition P, construite à partir d'autres propositions Q, R, S, ... est vraie ou fausse suivant les valeur de vérité de Q, R, S, ...

P
V
F

Une proposition peut s'exprimer en langage courrant ou en symboles mathématiques (on introduira les plus fréquents dans ce chapitre, d'autres viendront au fur et à mesure des besoins).

Exemple 2 .

- $P : 2+3=4$. *La proposition P est fausse.*
- $Q : \sqrt{3}-\sqrt{2}=1$. *La proposition Q est fausse.*
- $R : \sqrt{3}+\sqrt{2}>1$. *La proposition R est vraie.*

À partir d'une ou plusieurs propositions, on peut en construire d'autres. C'est l'objet des paragraphes suivants.

Les connecteurs logiques

Soient P et Q deux propositions. Les connecteurs logiques sont :

Opérateur " et " (Conjonction de deux propositions)

Définition 3 .
La conjonction de deux propositions P et Q notée (P et Q) est vraie si les deux propositions P et Q sont vraies.

Table de vérité de (P et Q)

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 4 .

P : $\big(3$ est impair et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}\big)$. La proposition P est vraie.

Q : $(2+4+6 = 3 \times 4$ et $3 \times 4 \neq 12)$. La proposition P est fausse.

Opérateur " ou " (Disjonction de deux propositions)

Définition 5 .

La disjonction de deux propositions P et Q notée (P ou Q) est vraie si au moins une des deux propositions P ou Q est vraie.

Table de vérité de (P ou Q) :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 6 .

P : $\big(\sqrt{5} \in \mathbb{N}$ ou $\sqrt{9} = -3\big)$. La proposition P est fausse.

Q : $\left(9+6 = 15 \quad \text{ou} \quad \dfrac{1}{3} > \dfrac{1}{2}\right)$. La proposition Q est vraie.

La négation " non " . (Négation d'une proposition)

Définition 7 .

On note "non P " ou "$\overline{P}$ " la négation d'une proposition P, c'est-à-dire la proposition qui est vraie si P fausse et fausse si P est vraie.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple 8 .

Donner la négation des propositions suivantes :

- $P : 2 > \sqrt{2} \quad , \quad Q : \sqrt{2} \in \mathbb{Z}.$

  On a

  $\overline{P} : 2 \leq \sqrt{2} \quad , \quad \overline{Q} : \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}.$

Remarque 9 .

♣ $\left(P \text{ et } \overline{P}\right)$ *est une proposition fausse.*

♣ $\left(P \text{ ou } \overline{P}\right)$ *est une proposition vraie.*

L'implication $\Longrightarrow$ (L'implication de deux propositions)

Définition 10 .

Soit P et Q deux propositions. L'implication des deux propositions P et Q dans cet ordre est la proposition noté $(P \Longrightarrow Q)$, se lit " P implique Q " (ou si P alors Q) est vraie si P et Q sont vraies ou si P est fausse.

Table de vérité de $(P \Longrightarrow Q)$

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple 11 .

- $P : \left(-1 = 1 \Longrightarrow (-1)^2 = 1\right)$. *La proposition P est varie.*
- $Q : \left((-2)^2 = 2^2 \Longrightarrow -2 = 2\right)$. *La proposition Q est fausse*
- $R : \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5} \Longrightarrow 5 \text{ est premier}\right)$. *La proposition R est varie.*

Exemple 12 .

Montrer à l'aide d'une table de vérité que les deux propositions : $(P \Longrightarrow Q)$ et $\left(\overline{P} \text{ ou } Q\right)$ ont la même valeur de vérité.

On a

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{P}$ ou Q	$P \Longrightarrow Q$
V	*V*	*F*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*V*	*V*
F	*F*	*V*	*V*	*V*

donc $(P \Longrightarrow Q)$ et $\left(\overline{P} \text{ ou } Q\right)$ ont la même valeur de vérité.

Remarque 13 .

1. *La proposition $P \Longrightarrow Q$ est fausse uniquement si P est vraie et Q est fausse.*
2. Si *P est vraie et $(P \Longrightarrow Q)$ vraie alors Q est vraie.*
3. *Pour montrer l'implication $P \Longrightarrow Q$, on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.*

L'équivalence $\iff$.

Définition 14 .

Soit P et Q deux propositions. L'équivalence de P et Q notée $P \iff Q$ est la proposition qui est vraie si P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses.

$$P \iff Q \textit{ se lit : } (P \textit{ équivaut à } Q) \quad \textit{ou} \quad (P \textit{ si et seulement si } : Q)$$

La table de vérité de $(P \iff Q)$

P	Q	$P \iff Q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Remarque 15 .
$P \iff Q$ est la proposition : $[(P \implies Q)$ *et* $(Q \implies P)]$

Remarque 16 .

- *L'équivalence logique joue pour les propositions, le rôle que joue l'égalité pour les nombres.*
- *Quand vous écrivez $P \iff Q$, vous devez être convaincu que la proposition de gauche P **entraîne** la proposition de droite Q et aussi que la proposition de droite Q **entraîne** la proposition de gauche P.*

Exemple 17 .
$P : \left(\sqrt{3^2+4^2} = 7 \iff 7 \textit{ est impair}\right)$. *La proposition P est fausse.*
$Q : \left(\sqrt{2} > \sqrt{3} \iff \sqrt{16} = -4\right)$. *La proposition Q est vraie.*

Propriété 18 .

Soient P et Q deux propositions.

- $\overline{P \textit{ ou } Q} \iff \overline{P}$ et $\overline{Q}$.
- $\overline{P \textit{ et } Q} \iff \overline{P}$ *ou* $\overline{Q}$.

Démonstration 19 .

On démontre ces équivalences à l'aide de tables de vérité.

P	Q	P *ou* Q	$\overline{P \textit{ ou } Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P}$ et $\overline{Q}$
V	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*
V	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*
F	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*

et

P	Q	P et Q	$\overline{P \text{ et } Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P}$ ou $\overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Dans chaque table, on lit effectivement les mêmes valeurs de vérité dans les quatrième et septième colonnes.

Remarque 20 .

Soit P une proposition.

♣ $(P \text{ et } P) \iff P$

♣ $(P \text{ ou } P) \iff P.$

Théorème 21 .

Soient P, Q et R trois propositions.

1. $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$
2. $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P).$
3. $(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R \iff P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)$
4. $(P \text{ et } Q) \text{ et } R \iff P \text{ et } (Q \text{ et } R)$.
5. $(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \iff (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$
6. $(P \text{ et } Q) \text{ ou } R \iff (P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)$

Démonstration 22 .

Démontrons par exemple la troisième et la quatrième équivalence à l'aide d'une table de vérité.

5)

P	Q	R	P ou Q	$(P$ ou $Q)$ et R	P et R	Q et R	$(P$ et $R)$ ou $(Q$ et $R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

6)

P	Q	R	P et Q	$(P$ et $Q)$ ou R	P ou R	Q ou R	$(P$ ou $R)$ et $(Q$ ou $R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

On lit effectivement les mêmes valeurs de vérité dans les cinquième et huitième colonnes.

Exemple 23 .

Soient P et Q deux proposistions.

Montrer que : $(P \iff Q) \iff [(P \implies Q)$ *et* $(Q \implies P)]$.

Il s'agit de vérifier que les deux propositions $P \iff Q$ *et* $[(P \implies Q)$ *et* $(Q \implies P)]$ *ont les mêmes valeurs de vérité.*

P	Q	$P \iff Q$	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$[(P \implies Q)$ et $(Q \implies P)]$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

On lit bien les mêmes valeurs de vérité dans les troisième et sixième colonnes.

Exemple 24 .

Soit P une proposition. Montrer que : $\overline{\overline{P}} \iff P$.

Remarque 25 .

Les expressions " Condition nécessaire et suffisante (CNS) ", " si et seulement si (ssi) ", " il faut et il suffit " signifient toutes « logiquement équivalent » ou encore " $\iff$ *"*

Les quantificateurs

Fonction propositionnelle

Définition 26 .

On appelle fonction propositionnelle tout énoncé mathématique contenant une ou plusieurs variables appartenant à un ensemble E et qui devient une proposition à chaque fois qu'on remplace la variable (ou les variables) par un élément (ou des éléments) de E.

Une fonction propositionnelle est notée généralement $A(x)$, $B(x)$, $A(x,y)$, $A(x,y,z)$, *etc*

Exemple 27 .

Soit la fonction propositionnelle $A(x) : x^2 \geq x$ *où* $x \in \mathbb{R}$.

On a : $A\left(\frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}$, *est une proposistion fausse mais* $A(3) : 3^2 \geq 3$ *est une proposition vraie.*

Quantificateur universel et quantificateur existentiel

Définition 28 .

Soit $P(x)$ *une proposition dépendant de la variable* x. *Le quantificateur universel, noté* $\forall$, *permet de former la proposition "*$\forall x \in E$, $P(x)$*" qui est vraie lorsque* $P(x)$ *est vraie pour tous les éléments* x *de* E, *et qui est fausse si* $P(x)$ *est fausse pour au moins un élément* x *de* E.

Remarque 29 .

- ♣ *Le symbole* $\forall$ *se lit " pour tout " ou " Quel que soit " est appelé quantificateur universel.*
- ♣ *Après* $\forall$, *la virgule se lit " on a " ou ne se lit pas.*
- ♣ $\forall x \in E$, $P(x)$ *se lit " pour tout* x *dans* E *la proposition* $P(x)$ *est vérifiée " ou " quel que soit* x *dans* E *la proposition* $P(x)$ *est vérifiée "*

Définition 30 .

Soit $P(x)$ *une proposition dépendant de la variable* x. *Le quantificateur existentiel, noté* $\exists$, *permet de former la proposition "*$\exists x \in E$, $P(x)$*" qui est vraie lorsque* $P(x)$ *est vraie pour au moins un élément* x *de* E, *et qui est fausse si* $P(x)$ *est fausse pour tous les éléments de* E.

Remarque 31 .

- ♣ *Le symbole* $\exists$ *se lit " il existe au moins " ou tout simplement " il existe " est appelé quantificateur existentiel.*
- ♣ *Après* $\exists$, *la virgule se lit " tel que ".*
- ♣ $\exists x \in E$, $P(x)$ *se lit " il existe* x *dans* E *la proposition* $P(x)$ *est vérifiée ".*
- ♣ *L'équation* $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ *admet une solution unique dans* $\mathbb{R}$ *à savoir* $x = \sqrt{2}$. *On écrit :* $(\exists! x \in \mathbb{R})$, $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$. *Le symbole* $\exists!$ *se lit " il existe un unique " ou " il existe un seul ".*

Exemple 32 .

1. P_1 : "$\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 \geq 0$". *La proposition* P_1 *est vraie.*
2. P_2 : "$\forall x \in \mathbb{R}, \ x \geq 0$". *La proposition* P_2 *est fausse.*

3. P_3 : " $\forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{x = 1 \iff x^2 = 1}_{P(x)}$" . *La proposition P_3 est fausse car $-1 \in \mathbb{R}$ et $P(-1)$ est fausse.* $\left(P(-1) :\ \underbrace{-1 = 1}_{F} \iff \underbrace{(-1)^2 = 1}_{V} \right)$.

4. P_4 : " $\forall x \in \mathbb{R},\ \underbrace{x^2 > 1 \implies x > 1}_{P(x)}$". *La proposition P_4 est fausse car $-2 \in \mathbb{R}$ et $P(-2)$ est fausse.* $\left(P(-2) :\ \underbrace{(-2)^2 > 1}_{V} \implies \underbrace{-2 > 1}_{F} \right)$.

5. P_5 : "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = -1$" . *La proposition P_5 est fausse car (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).*

6. P_6 : "$\exists x \in \mathbb{R}, x(x-1) < 0$" . *La proposition P_6 est vraie* $\left(\text{par exemple } \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \text{ vérifie } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) < 0 \right.$

7. P_7 : " $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 - n > n$ ". *La proposition P_7 est vraie car $3 \in \mathbb{N}$ et $3^2 - 3 > 3$.*

Montrer une assertion universelle

Pour démontrer une proposition de type " $\forall x \in E,\ P(x)$ " on commence par l'introduction d'une variable x par " soit " est un acte de naissance pour x. Une fois qu'une preuve est terminée, les variables qui y figuraient ne désignent plus rien.

Exemple 33 .

On veut montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} &= \frac{2x - x^2 - 1}{2(x^2+1)} \\ &= \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{2(x^2+1)} \\ &= \frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)}. \end{aligned}$$

et comme : $\dfrac{-(x+1)^2}{2(x^2+1)} \leq 0$ *alors*

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Montrer l'existence d'un objet

Quand on veut montrer que : " $\exists x \in E,\ P(x)$ " et qu'on déjà en tête un exemple d'objet $x \in E$, on écrit : " Posons $x = ...$ " puis on vérifie que x satisfait la propriété P.

Exemple 34 .

Montrer que : $\exists x \in \mathbb{R},\ \sin x = x.$

Posons $x = 0$, *alors* : $\sin 0 = 0$. *Donc*

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \sin x = x.$$

Remarque 35 .

- *La proposition : " il existe un et un seul élément x de E tel que $P(x)$ est vraie " s'écrit en abrégé :*

$$\text{"}\ \exists! x \in E,\ P(x)\ \text{"}$$

- *Les quantificateurs ne sont pas des abréviations.*

Négation d'une proposition avec quantificateurs

Soit une proposition P, alors on a les équivalences logiques :

$$non\,(\forall x \in E,\ P(x)) \iff \exists x \in E,\ non\,(P(x)),$$

$$non\,(\exists x \in E,\ P(x)) \iff \forall x \in E,\ non\,(P(x)).$$

Exemple 36 .

Donner la négation des propositions suivantes :

$P_1 : \forall x \in [1, +\infty[\,,\ \ x + 1 \in \mathbb{Z}.$

$P_2 : \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0.$

$P_3 : \exists n \in \mathbb{N},\ \ n^2 = n.$

$P_4 : \forall x \in \mathbb{R},\ \ x < 0.$

$P_5 : (\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y < 0),\ x + y \geq 0.$

$P_6 : (\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}),\ x^2 + y^2 = 0.$

$P_7 : (\exists x \in \mathbb{R}),\ (\exists y \in \mathbb{R}),\ x + y \geq 10.$

On a

$\overline{P_1} : \exists x \in [1, +\infty[\,,\ \ x + 1 \notin \mathbb{Z}.$

$\overline{P_2} : \forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + 1 \neq 0.$

$\overline{P_3} : \forall n \in \mathbb{N},\ \ n^2 \neq n.$

$\overline{P_4} : \exists x \in \mathbb{R},\ \ x \geq 0.$

$\overline{P_5} : (\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y < 0),\ \ x + y < 0.$

$\overline{P_6} : (\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R}),\ \ x^2 + y^2 \neq 0.$

$\overline{P_7} : (\forall x \in \mathbb{R}),\ (\forall y \in \mathbb{R}),\ \ x + y < 10.$

Exemple 37 .

1. *On a vu que* : $(P \implies Q) \iff \left(\overline{P}\ ou\ Q\right)$. *Déduire la négation de* $(P \implies Q)$.
2. *Donner la négation de chacune des propositions suivantes* :

   $P : (\forall x \in \mathbb{R}),\ \ x \geq 2 \implies x^2 \geq 4$

   $Q : (\forall\,(a, b) \in \mathbb{R}^2),\ \ (a^2 + b^2 \geq ab \quad ou \ \ a^2 + 1 \neq a).$

♣ *On a* $(P \implies Q) \iff (\overline{P} \text{ ou } Q)$, *donc*

$$\begin{aligned}\left(\overline{P \implies Q}\right) &\iff \left(\overline{\overline{P} \text{ ou } Q}\right) \\ &\iff \left(P \text{ et } \overline{Q}\right)\end{aligned}$$

♣ $\overline{P} : (\exists x \in \mathbb{R}),\ x \geq 2 \quad \text{et } x^2 < 4.$
$\overline{Q} : (\exists\, (a,b) \in \mathbb{R}^2),\ (\ a^2 + b^2 < ab \quad \text{et} \quad a^2 + 1 = a)\,.$

Remarque 38 .
Pour la négation d'une phrase logique, il n'est pas nécessaire de savoir si la phrase est fausse ou vraie. Le procédé est algorithmique : on change le "pour tout " en " il existe " et inversement, puis on prend la négation de la proposition P.

Remarque 39 .
L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple les deux propositions : :

$$P : \ (\forall x \in \mathbb{R}) \ (\exists y \in \mathbb{R}), \ \ x \leq y \quad \text{et} \quad Q : (\exists y \in \mathbb{R}) \ (\forall x \in \mathbb{R}), \ \ x \leq y$$

sont totalement différentes : P *est une proposition vraie, mais* Q *est une proposition fausse.*

Remarque 40 .
La proposition " $(\forall x \in E)\ (\exists y \in F)\,,\ P(x,y)$*" signifie que pour tout* x *il existe une valeur* y *(qui dépend a priori de* x*) telle que* $P(x,y)$ *est vérifiée, alors que "* $(\exists y \in F)\ \ (\forall x \in E)\,,\ P(x,y)$*" signifie qu'il existe une valeur de* y *telle que* $P(x,y)$ *est vérifiée pour toutes les valeurs de* x *dans* E.

Exemple 41 .
Donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :
$P : (\forall x \in \mathbb{R}) \ \ (\exists y \in \mathbb{R}), \ \ x + y > 0$
$Q : (\exists x \in \mathbb{R}) \ \ (\forall y \in \mathbb{R}), \ \ x < y^2$

♣ *La proposition* R *est vraie, pour un* x *donné on peut prendre par exemple* $y = -x + 1$ *et alors* $x + y = 1 > 0$.

♣ *La proposition* Q *est vraie, il suffit de prendre* $x = -1$ *ainsi pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $-1 < y^2$.

Modes de raisonnement

Raisonnement par déduction

Il consiste à appliquer la loi logique : $[P \text{ et } (P \implies Q)] \implies Q$. C'est-à-dire si P est vraie et $(P \implies Q)$ est varie alors Q est vraie.

Remarque 42 .
$P \implies Q$ *n'est pas suffisante pour déduire que* Q *est vraie*
(Le symbole " $\implies$ *" ne peut pas remplacer le mot "donc")*.

Exemple 43 .

Soit $x \in \mathbb{R}$. *Montrer que :* $x^2 + 4x + 8 > 1$.

On a $x^2 + 4x + 8 = x^2 + 4x + 4 + 4 = (x+2)^2 + 4$ *et comme* $(x+2)^2 \geq 0$ *alors* $(x+2)^2 + 4 \geq 4$ *c'est-à-dire* $x^2 + 4x + 8 \geq 4$ *et comme* $4 > 1$ *donc* $x^2 + 4x + 8 > 1$.

Raisonnement direct

Pour montrer l'implication $P \implies Q$, on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie.

Exemple 44 .

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \textit{ est pair} \implies n^2 \textit{ est pair}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que n *est pair, et on montre que* n^2 *est pair.*

On a n *est pair alors il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 2k$

alors

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times \left(2k^2\right)$$

et comme $2k^2 \in \mathbb{N}$, *donc* n^2 *est pair. D'où*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \textit{ est pair} \implies n^2 \textit{ est pair}$$

Raisonnement par implication successives

Ce raisonnement est basé sur la loi logique suivante :

$$(P \implies P_1 \textit{ et } P_1 \implies P_2 \textit{ et...et } P_n \implies Q) \implies (P \implies Q)$$

donc pour montrer $P \implies Q$ il suffit de montrer que $P \implies P_1$ *et* $P_1 \implies P_2$ *et...et* $P_n \implies Q$

Exemple 45 .

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \implies x = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, *on a*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{x}} &= 1 - \sqrt{x} \\
&\implies 1 = \left(1 - \sqrt{x}\right)\left(1 + \sqrt{x}\right) \\
&\implies 1 = 1 - x \\
&\implies x = 0
\end{aligned}$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \implies x = 0$$

Raisonnement par contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

$$(P \implies Q) \iff (\overline{Q} \implies \overline{P})$$

Donc si l'on souhaite montrer la proposition $P \implies Q$, il suffit de montrer que $\overline{Q} \implies \overline{P}$.

Exemple 46 .

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,,\ \left(x \neq 4 \implies \sqrt{x} - 1 \neq \dfrac{x}{4}\right).$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, *par contraposée montrons que :* $\sqrt{x} - 1 = \dfrac{x}{4} \implies x = 4.$

On a

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 1 &= \frac{x}{4} \\ &\implies 4\left(\sqrt{x} - 1\right) = x \\ &\implies x - 4\sqrt{x} + 4 = 0 \\ &\implies \left(\sqrt{x} - 2\right)^2 = 0 \\ &\implies x = 4 \end{aligned}$$

donc

$$\sqrt{x} - 1 = \frac{x}{4} \implies x = 4.$$

D'où par contraposée

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right),\ \left(x \neq 4 \implies \sqrt{x} - 1 \neq \frac{x}{4}\right).$$

Exemple 47 .

Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (xy \neq 1 \ \ et \ \ x \neq y) \implies \dfrac{x}{x^2+x+1} \neq \dfrac{y}{y^2+y+1}$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *par contraposée montrons que :* $\dfrac{x}{x^2+x+1} = \dfrac{y}{y^2+y+1} \implies xy = 1$ *ou* $x = y$

On a

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+x+1} &= \frac{y}{y^2+y+1} \\ &\implies x\left(y^2+y+1\right) = y\left(x^2+x+1\right) \\ &\implies xy^2 + xy + x = yx^2 + yx + y \\ &\implies x - y - xy\,(x-y) = 0 \\ &\implies (x-y)\,(1-xy) = 0 \\ &\implies x = y \ \ ou \ \ xy = 1 \end{aligned}$$

donc

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{y}{y^2+y+1} \implies xy = 1 \ \ ou \ \ x = y$$

D'où par contraposée

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (xy \neq 1 \ \ et \ \ x \neq y) \implies \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$$

Raisonnement par équivalences

Pour montrer l'équivalence $P \iff Q$, on peut :

- ou bien raisonner par double implication, c'est-à-dire montrer successivement les deux implications $P \implies Q$ et $Q \implies P$,

- ou bien raisonner par équivalences, c'est-à-dire modifier P de proche en proche jusqu'à obtenir Q **en préservant les équivalences à chaque étape**. On rédige alors de la manière suivante :

$$P \iff ... \iff ... \iff Q$$

conclusion on a bien montré l'équivalence $P \iff Q$.

Exemple 48 .

Soit a et b deux réels, montrer que

$$a^2+b^2+1 \geq ab+a+b \iff (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0$$

On a

$$\begin{aligned} a^2+b^2+1 \quad & \geq \quad ab+a+b \\ & \iff 2\left(a^2+b^2+1\right) \geq 2\left(ab+a+b\right) \\ & \iff 2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b \geq 0 \\ & \iff \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(a^2-2a+1\right)+\left(b^2-2b+1\right) \geq 0 \\ & \iff (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

donc

$$a^2+b^2+1 \geq ab+a+b \iff (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0$$

Exemple 49 .

Montrer que :

$$\forall x \in [-2,2], \quad \sqrt{4-x^2}-x \leq 2\sqrt{2}$$

Soit $x \in [-2,2]$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{4-x^2}-x \quad & \leq \quad 2\sqrt{2} \\ & \iff \sqrt{4-x^2} \leq x+2\sqrt{2} \\ & \iff 4-x^2 \leq x^2+4x\sqrt{2}+8 \\ & \iff -2x^2-4x\sqrt{2}-4 \leq 0 \\ & \iff x^2+2x\sqrt{2}+2 \geq 0 \\ & \iff \left(x+\sqrt{2}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

comme $\left(x+\sqrt{2}\right)^2 \geq 0$ est une proposition vraie, alors

$$\forall x \in [-2,2], \quad \sqrt{4-x^2}-x \leq 2\sqrt{2}$$

Raisonnement par disjonction de cas

Ce raisonnement est utilisé pour montrer une proposition de type " $\forall x \in E,\ P(x)$ " avec $E = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$, alors pour ce faire on sépare les raisonnements suivant que $x \in E_1$, $x \in E_2$,...,$x \in E_n$.

Exemple 50 *.*

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ |x-2| < x^2 - 2x + 3$

♣ Si $x - 2 \geq 0$ *c'est-à-dire* $x \geq 2$ *alors* $|x-2| = x - 2$ *et*

$$|x-2| < x^2 - 2x + 3 \iff x - 2 < x^2 - 2x + 3 \iff 0 < x^2 - 3x + 5$$

et comme $\Delta = -11$ *et* $a > 0$ $(a = 1)$. *Alors* $x^2 - 3x + 5 > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Donc*

$$(\forall x \in [2, +\infty[), \quad |x-2| < x^2 - 2x + 3$$

♣ Si $x - 2 \leq 0$ *c'est-à-dire* $x \leq 2$ *alors* $|x-2| = -(x-2)$ *et*

$$|x-2| < x^2 - 2x + 3 \iff -(x-2) < x^2 - 2x + 3 \iff 0 < x^2 - x + 1$$

et comme $\Delta = -3$ *et* $a > 0$ $(a = 1)$. *Alors* $x^2 - x + 1 > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Donc*

$$(\forall x \in \left]-\infty, 2\right]), \quad |x-2| < x^2 - 2x + 3$$

On conclut que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ |x-2| < x^2 - 2x + 3$$

Exemple 51 *.*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* :

$$(E) : 3 - 2|x-4| = 2x + 5$$

Le tableau de signe de $x - 4$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$x - 4 = 0 \iff x = 4$$

comme $a = 1 > 0$ *alors*

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	

■ Si $x \in \left]-\infty, 4\right]$, *alors* $|x-4| = -(x-4)$ *donc*

$$\begin{aligned} (E) &\iff 3 + 2(x-4) = 2x + 5 \\ &\iff 2x - 2x = 5 + 8 - 3 \\ &\iff 0 = 10 \quad (\textit{impossible}) \end{aligned}$$

d'où

$$S_1 = \phi$$

■ Si $x \in [4, +\infty[$, *alors* $|x-4| = (x-4)$ *donc*

$$\begin{aligned} (E) \quad &\Longleftrightarrow \quad 3 - 2(x-4) = 2x + 5 \\ &\Longleftrightarrow \quad -2x - 2x = 5 - 3 - 8 \\ &\Longleftrightarrow \quad -4x = -6 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

et comme $\frac{3}{2} \notin [4, +\infty[$ *donc*

$$S_2 = \phi$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est* :

$$S = S_1 \cup S_2 = \phi$$

Raisonnement par l'absurde

On veut montrer qu'une proposition P est vraie. On suppose que c'est sa négation $\overline{P}$ qui est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse. On en conclut que P est vraie (puisque Q est fausse, l'implication $\overline{P} \Rightarrow Q$ ne peut être vraie que si $\overline{P}$ est fausse ou encore si P est vraie). Le schéma du raisonnement par l'absurde est le suivant :

Quand $\overline{P} \;\; \Rightarrow$ Q est une proposition vraie, et Q est une proposition fausse,on peut affirmer que P est une proposition vraie.

Exemple 52 .

Soit $a \notin \mathbb{Q}$, *montrer que* : $(2+a) \notin \mathbb{Q}$.

Par l'absurde, supposons que : $(2+a) \in \mathbb{Q}$.

Donc il existe $b \in \mathbb{Q}$ *tel que* : $2 + a = b$ *donc* $a = b - 2$ *et comme* $2 \in \mathbb{Q}$ *et* $b \in \mathbb{Q}$ *alors* $b - 2 \in \mathbb{Q}$ *c'est-à-dire* $a \in \mathbb{Q}$ *ce qui est contradictoire avec* $a \notin \mathbb{Q}$ *donc*

$$(2+a) \notin \mathbb{Q}.$$

Exemple 53 .

Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Par l'absurde supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Donc il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *tel que* $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ *avec* $PGCD(a,b) = 1$.

En élevant l'égalité au carré nous obtenous $q^2 \times 2 = p^2$. *Donc* p^2 *est un multiple de* 2, *cela implique que* p *est un multiple de* 2. *Donc* $p = 2k$ *avec* $k \in \mathbb{N}$, *d'où* $q^2 \times 2 = 4k^2$ *alors* $q^2 = 2k^2$. *Nous en déduisons maintenant que* q^2 *est un multiple de* 2 *et comme ci-dessus que* q *est multiple de* 2, *ce qui est contradictoire avec l'hypothèse* $PGCD(p,q) = 1$. *Donc*

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Raisonnement par contre-exemple

Pour montrer que "$\forall x \in E,\ P(x)$ " est fausse, il faut est il suffit de montrer que sa négation est varie c'est-à-die "$\exists x_0 \in E,\ \overline{P(x_0)}$ " est varie le réel x_0 est appelé " contre exemple ".

Exemple 54 .

Montrer que la proposition suivante est fausse : $\forall x \in \mathbb{R}^-,\ x < 0.$

On a $0 \in \mathbb{R}^-$ *et* $P(0)$ *est fausse* $(P(0):\ 0 < 0)$. *Donc la proposition* $\forall x \in \mathbb{R}^-,\ x < 0$ *est fausse.*

Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété qui ne dépend que de l'entier naturel n.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\text{La propriété } P(n) \text{ est vraie pour tout } n \geq n_0 \iff \begin{cases} P(n_0) \text{ est vraie} \\ \\ \text{et pour } n \geq n_0 \\ \\ \text{on a : } P(n) \implies P(n+1) \text{ est vraie} \end{cases}$$

Exemple 55 .

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \underbrace{1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{P(n)}$$

- *Pour* $n = 1$ *on a* : $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$, *et par suite* $P(1)$ *est vraie. C'est-à-dire la proposition est vraie pour* $n = 1$.
- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$.

  On suppose que : $\underbrace{1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}_{P(n)}$, *et on montre que* :

$$\underbrace{1 + 2 + ... + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}_{P(n+1)}$$

On a

$$\begin{aligned} 1 + 2 + ... + (n+1) &= 1 + 2 + ... + n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

■ *D'après le principe de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 56 .

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{3^n \geq 1 + 2n}_{P(n)}$$

■ *Pour* $n = 0$ *on a* : $3^0 \geq 1 + 2 \times 0$, *et par suite* $P(1)$ *est vraie. C'est-à-dire la proposition est vraie pour* $n = 0$.

■ *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* : $\underbrace{3^n \geq 1 + 2n}_{P(n)}$, *et on montre que* : $\underbrace{3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1)}_{P(n+1)}$.

On a : $3^n \geq 1 + 2n$, *donc* $3^{n+1} \geq 3(1 + 2n)$, *c'est-à-dire* $3^{n+1} \geq 3 + 6n$, *et comme* $3 + 6n \geq 1 + 2(n+1)$ *alors* :

$$3^{n+1} \geq 1 + 2(n+1).$$

■ *D'après le principe de récurrence*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3^n \geq 1 + 2n .$$

Somme généralisée

Pour exprimer d'une façon simple la somme de n réels, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ on utilise le symbole $\sum$ de la manière suivante : $x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{k=1}^{k=n} x_k$, il se lit somme de x_k lorsque k varie 1 jusqu'à n.

Soient $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ des réels et i un réel, alors : $\sum_{k=1}^{k=n} i x_k = i \sum_{k=1}^{k=n} x_k$.

Soient $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ et $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ des réels alors : $\sum_{k=1}^{k=n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{k=n} x_k + \sum_{k=1}^{k=n} y_k$.

Soient $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ des réels alors $\dfrac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{N} = \dfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=n} x_k n_k = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\dfrac{n_k}{N}\right) x_k$

Exemple 57 .

Écrrie à l'aide du symbole somme les sommes suivantes :

1. $1 + 2 + 3 + ... + n$
2. $n + (n+1) + ... + 2n$
3. $2^3 + 2^4 + ... + 2^{12}$

4. $\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{2^{30}}+...+\frac{1}{2^{1000}}$

5. $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{10}{1024}$.

♣ $1+2+3+...+n=\sum_{k=1}^{n}k$

♣ $n+(n+1)+...+2n=\sum_{k=n}^{2n}k$

♣ $2^3+2^4+...+2^{12}=\sum_{k=3}^{12}2^k$.

♣ $\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{2^{30}}+...+\frac{1}{2^{1000}}=\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{2^{10k}}=\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{2^{10}}\right)^k$.

♣ $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{10}{1024}=\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{2^k}$

Exercice 58 .

Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,,\; 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\sum_{k=1}^{k=n}k^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

FIN

www.etude − generale.com

Pr : **Yahya MATIOUI**