Série d'exercices sur la logique et raisonnements

EXERCICE 1 .

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

$$\begin{aligned}
P_1 &: (\exists n \in \mathbb{N}), n^2 > 7 \\
P_2 &: (\exists x \in \mathbb{R}), |x| \leq 0 \\
P_3 &: \left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right), x + \sqrt{x} > 2 \\
P_4 &: (\forall x \in \mathbb{R}^*), x + \frac{1}{x} \geq 2 \\
P_5 &: (\exists x \in \mathbb{Q}), x^2 = 9 \\
P_6 &: (\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}),\ x - y = 3 \\
P_7 &: (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \left]-\infty, 1\right[),\ 3x^2y - x + y = 0 \\
P_8 &: (\forall x \in [0,2])\left(\exists y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]\right),\ xy - x + 2y - 1 = 0 \\
P_9 &: (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), x < y^2.
\end{aligned}$$

EXERCICE 2 .

Compléter, lorsque c'est possible avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais.

1. $...x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2. $...x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x + 2 = 0$
3. $...x \in \mathbb{R},\ 2x + 1 = 0$
4. $...x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 \neq 0.$

EXERCICE 3 .

1. *Montrer que :* $x > 2$ *et* $y \geq \frac{1}{3} \implies 0 \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{7}{2}$
2. *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leq 2 \implies |x^2 + x - 2| \leq 10.$
3. *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-2| \leq 1 \implies \left|\frac{2x+3}{x+2}\right| \leq 3$

EXERCICE 4 .

1. *Montrer que :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$

2. *Montrer que* : $\forall (x,y) \in ([0,+\infty[)^2, \quad \sqrt{x}+\sqrt{y} = \dfrac{x+y+2}{2} \iff x=1$ *et* $y=1$.

3. *Montrer que* : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) = 1 \iff x+y=0$.

4. *Montrer que* : $\forall (a,b) \in ([0,+\infty[)^2, \quad \sqrt{a}+\sqrt{b}-1 = \dfrac{a+b}{2} \iff a=b=1$.

5. *Montrer que* : $\forall x \in \,]0,+\infty[\, , \sqrt{2x+2}-\sqrt{x} = 1 \iff x=1$

6. *Montrer que* : $\forall (a,b) \in ([0,+\infty[)^2, \sqrt{a+1}-\sqrt{b+1} < \sqrt{a}-\sqrt{b} \iff b < a$

7. *Soient* x *et* y *deux réels strictement positifs. Montrer que* :
$$x < y \iff \frac{x}{y} < \frac{2x+5y}{5x+2y} < \frac{y}{x}$$

EXERCICE 5 .

1. *Montrer que* : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \, x \neq y \implies (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que* : n^2 *est un multiple de* $3 \implies n$ *est un multiple de* 3.

EXERCICE 6 .

1. *Montrer que* : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^4+3x^2+1} \geq x^2+1$.

2. *Montrer que* : $\forall (a,b) \in ([0,+\infty[)^2, \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}$

3. *Montrer que* : $\forall (a,b) \in (]0,+\infty[)^2, \quad \dfrac{a^2}{a+b} \geq \dfrac{3a-b}{4}$

EXERCICE 7 .

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que* n^2+1 *n'est pas un carré parfait.*

2. *Montrer que* : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $\sqrt{4n^2+5n+3} \notin \mathbb{N}$

4. *Démontrer que si* a *et* b *sont deux entiers relatifs tels que* $a+b\sqrt{2}=0$ *alors* $a=b=0$.

5. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que si* n *est un carré parfait, alors* $2n$ *ne peut pas être un carré parfait.*

EXERCICE 8 .

1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation suivante* $(E) : |2x^2-x-6|-|x+1|-1=0$.

2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation suivante* $(E') : \sqrt{3x+4}=x$.

3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes* (I_1) *et* (I_2) :

$$(I_1) : \sqrt{x^2+1} - 2x + 1 \leq 0 \qquad ; \qquad (I_2) : \sqrt{x-1} \geq x - 7$$

EXERCICE 9 .

1. *Montrer que* : $(\forall n \geq 5)\,,\ n^2 < 2^n$.

2. *Montrer que* : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. *Montrer que* : $(\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\})\,,\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k = \frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$.

4. *Montrer que* : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 7$ *divise* $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

EXERCICE 10 .

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On pose* : $u_n = (1+1)^2 \times \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1+\frac{1}{5}\right)^2 \times ... \times \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2$.

   a) *Montrer que* : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = u_n \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$.

   b) *Montrer que* : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n > 2n+3$.

2. *Montrer que* : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 6$ *divise* $n(n+1)(n+2)$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**