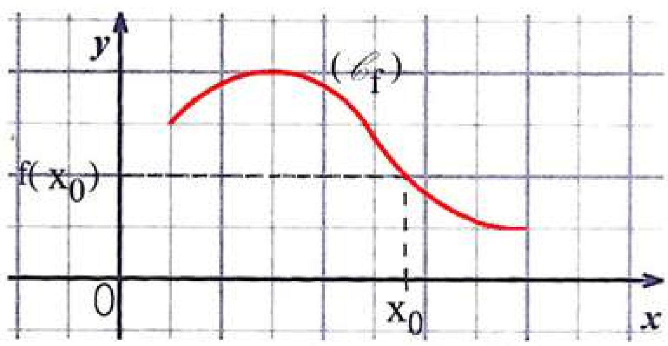
Limites Et Continuité

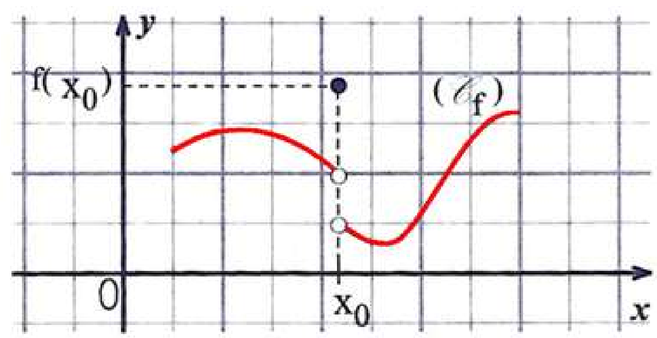
Continuite d'une fonction numérique

Continuité d'une fonction en un point

Definition 1 .
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en un point x_0.
On dit que la fonction f est continue au point x_0 si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.



La fonction f est continue en x_0



La fonction f n'est pas continue en x_0

Remarque 2 .
Si f est définie au point x_0 et n'admet pas de limite en x_0 ou sa limite est infinie en x_0, on dit que f est discontinue au point x_0.

Exemple 3 .

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. *Étudions la continuité de f au point $x_0 = 0$.*

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} \\
&= \frac{0}{\sqrt{0+1}+1} = 0
\end{aligned}$$

d'où $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = f(0)$, *par suite* f *est continue au point* $x_0 = 0$.

2. *Soit* g *la fonction numérique définie par :* $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x-3}, & x \neq 3 \\ g(3) = 7 \end{cases}$

   Étudions la continuité de g *au point* $x_0 = 3$.

   On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 3} g(x) &= \lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{x-3} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 3} \frac{(x+4)(x-3)}{x-3} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 3} x+4 \\
&= 3+4 \\
&= 7 = g(3)
\end{aligned}$$

   Ainsi la fonction g *est continue au point* $x_0 = 3$.

Continuité à droite - continuité à gauche

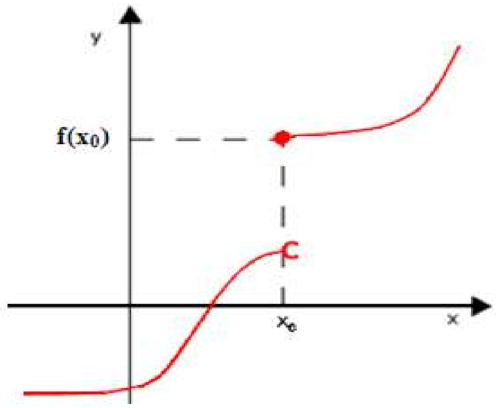
Definition 4 .

1. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle de la forme* $[x_0, x_0 + r[$ $\left(\text{où } r \in \mathbb{R}_+^*\right)$.

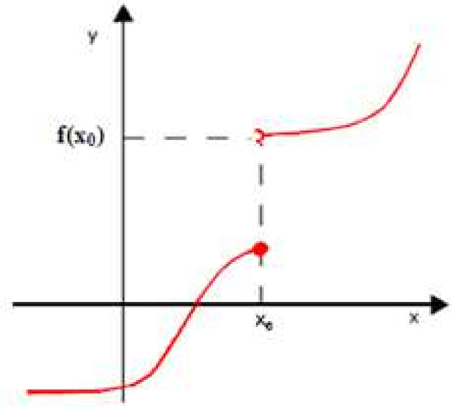
   On dit que f *est continue à droite en* x_0 *si :* $\lim_{\substack{x \longmapsto x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.

2. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle de la forme* $]x_0 - r, x_0]$ $\left(\text{où } r \in \mathbb{R}_+^*\right)$.

   On dit que f *est continue à gauche en* x_0 *si :* $\lim_{\substack{x \longmapsto x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$



f est continue à droite en x_0



f est continue à gauche en x_0

Exemple 5 .

1. *Soit f la fonction numérique définie par :* $\begin{cases} f(x) = 3 - x^2 \quad si \quad x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 1} \quad si \ x > 0 \end{cases}$

   Étudions la continuité à droite et à gauche de la fonction f au point $x_0 = 0$:

   On a $f(0) = 3$ et de plus :

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2 - 3}{2x - 1} = 3 = f(0)$$

   donc f est continue à droite au point $x_0 = 0$.

   On a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} 3 - x^2 = 3 = f(0)$$

   donc f est continue à gauche au point $x_0 = 0$.

2. *Soit g la fonction numérique définie par :* $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|} \quad si \quad x \neq 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$

   Étudions la continuité à droite et à gauche de la fonction g au point $x_0 = 1$:

   On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} x + 1 = 2 = g(1)$

   donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} g(x) = g(1)$ *, et la fonction g est continue à droite au point $x_0 = 1$.*

   On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} -\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} -\dfrac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} -x - 1 = -2$

   donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} g(x) \neq g(1)$ *et la fonction g n'est pas continue à gauche au point $x_0 = 1$.*

Théorème 6 .

Une fonction numérique f est continue au point x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche au point x_0. En d'autre termes :

$$(f \text{ est continue au point } x_0) \iff \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Exemple 7 .

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x+1} & si \;\; x \leq 0 \\ \\ f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x+3} & si \; x > 0 \end{cases}$

Étudions la continuité de la fonction f au point $x_0 = 0$.

On a : $f(0) = 0,$ *de plus*

$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{x^2 - x}{x+3} = 0 = f(0)$, *donc f est continue à droite au point $x_0 = 0$.*

On a $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} -\dfrac{x}{x+1} = 0 = f(0)$, *donc f est continue à gauche au point $x_0 = 0$.*

Comme $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ *alors f est continue au point $x_0 = 0$.*

Continuité d'une fonction sur un intervalle

Definition 8 .

1. *Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout point de I. En particulier : f est continue sur $]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$.*

2. *Une fonction f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a et à gauche en b.*

3. *Une fonction f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a.*

4. *Une fonction f est continue sur $]a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en b.*

Exemple 9 .

1. *Toute fonction polynomiale P est continue sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$:* $\lim_{x \longrightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

2. *Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.*

3. *Les fonction $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$*

4. *La fonction $x \longmapsto \tan x$ est continue sur* $\mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. *La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.*

6. *La fonction* $x \longmapsto \sqrt{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$.

7. *La fonction valeur absolue* $x \longmapsto |x|$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Opérations sur les fonctions continues

Propriété 10 .

Soit f *et* g *deux fonctions continues sur un intervalle* I *et* k *un nombre réel. Alors :*

1. *Les fonctions* $f+g$, $k.f$ *et* $f.g$ *sont continues sur* I.

2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *la fonction* $f^n : x \longmapsto (f(x))^n$ *est continue sur* I.

3. *Si la fonction* g *ne s'annule pas sur* I *alors* $\dfrac{1}{g}$ *et* $\dfrac{f}{g}$ *sont continues sur* I.

4. *La fonction* $|f|$ *est continue sur* I.

5. *Si* f *est positive sur* I *alors* $\sqrt{f}$ *est continue sur* I.

Exemple 11 .

1. *Soit* f *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^2 + 5x + \cos x$.

   Les fonctions $u : x \longmapsto x^2 + 5x$ *et* $v : x \longmapsto \cos x$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$ *donc la fonction* $f = u + v$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

2. *Soit* g *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :* $g(x) = \sqrt{x}\,(x^3 + 5x - 7)$

   Les fonctions $g_1 : x \longmapsto \sqrt{x}$ *et* $g_2 : x \longmapsto x^3 + 5x - 7$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^+$ *donc la fonction* $g = g_1 \times g_2$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$.

3. *Soit* h *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ *par :* $h(x) = \dfrac{3}{x-1}$.

   La fonction $h : x \longmapsto \dfrac{3}{x-1}$ *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, *car c'est une fonction rationnelle.*

Exemple 12 .

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\begin{cases} f(x) = x^2 + x + 1 & , \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x} & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Étudier la continuité de la fonction f *sur* $\mathbb{R}$.

♠ *Continuité de* f *sur* $]0, +\infty[$:

f est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $]0, +\infty[$.

♠ *Continuité de* f *sur* $]-\infty, 0[$:

La fonction $u : x \longmapsto \sin x$ *est continue sur* $]-\infty, 0[$ *et comme la fonction* $v : x \longmapsto x$ *est continue et ne s'annule pas sur* $]-\infty, 0[$ *donc la fonction* $f = \dfrac{u}{v}$ *est continue sur* $]-\infty, 0[$.

♠ *On étudie la continuité de la fonction en* 0.

On a $f(0) = 1$, *de plus*

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^2 + x + 1 = 1 = f(0)$. *Donc la fonction* f *est continue à droite en* 0.

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$. *Donc la fonction* f *est continue à gauche en* 0.

Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ *alors* f *est continue en* 0.

Donc la fonction f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Continuité de la composée de deux fonctions

Propriété 13 .

Soit f *une fonction définie sur un intervalle* I *et* g *une fonction définie sur un intervalle* J *tel que* $f(I) \subset J$, *et soit* x_0 *un élément de* I.

Si f *est continue au point* x_0 *et* g *est continue au point* $f(x_0)$ *alors la fonction* $g \circ f$ *est continue en* x_0.

Corollaire 14 .

Si f *est continue sur intervalle* I *et* g *est continue sur un intervalle* J *tel que* $f(I) \subset J$ *alors la fonction* $g \circ f$ *est continue sur l'intervalle* I.

Exemple 15 .

Soit f *la fonction numérique définie par :* $f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$.

Montrons que la fonction f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Les fonctions $f_1 : x \longmapsto 2x^2 - 3x + 4$ *et* $f_2 : x \longmapsto \cos x$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$ *et* $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ *alors la fonction* $f = f_2 \circ f_1$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 16 .

Soit f *la fonction numérique définie par :* $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1 + \sin^2 x}}$.

Étudions la continuité de f *sur* $\mathbb{R}^+$.

La fonction $u : x \longmapsto \dfrac{x}{1 + \sin^2 x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *et* $u(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ *et la fonction* $v : x \longmapsto \sqrt{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$. *Donc la fonction* $f = v \circ u$ *est continue sur* $\mathbb{R}^+$.

Exemple 17 .

Déterminons les limites : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \sin\left(\dfrac{1 - \cos x}{x^2}\pi\right)$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \cos\left(\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$.

♣ *On a* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}\pi = \dfrac{\pi}{2}$, *puisque la fonction* $\sin$ *est continue en* $\dfrac{\pi}{2}$ *alors*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \sin\left(\frac{1 - \cos x}{x^2}\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

♣ *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\pi\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}}=\pi,$ *puisque la fonction* cos *est continue en* π

alors

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\cos\left(\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=\cos\pi=-1$$

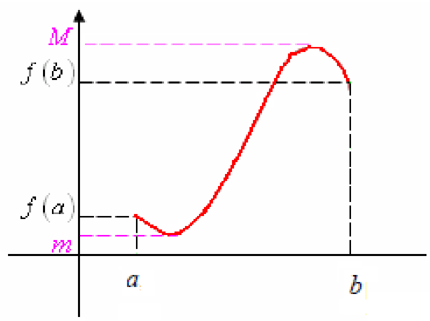
Image d'un intervalle par une fonction continue

Image d'un segment par une fonction continue

Théorème 18 .

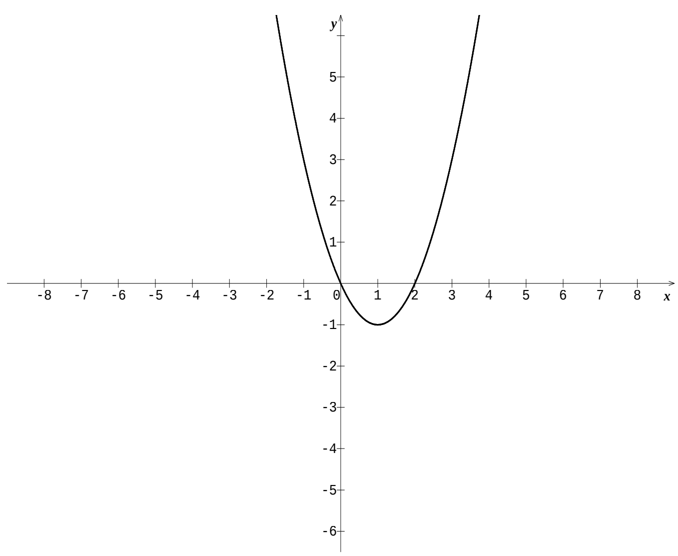
L'image d'un segment $[a,b]$ *par une fonction continue est le segment* $[m,M]$ *où*

$$m=\min_{x\in[a,b]}f(x)\quad et\ M=\max_{x\in[a,b]}f(x)$$



Exemple 19 .

Soit f *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=x^2-2x$



A partir du graphe de la fonction f, on déduit que :

$$f([-1,2]) = [-1,3] \quad , \quad f(]-1,0]) = [0,3[\quad , \quad f(]-\infty,1]) = [-1,+\infty[$$

$$f([2,+\infty[) = [0,+\infty[\quad , \quad f(\mathbb{R}) = [-1,+\infty[$$

Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. On a alors les résultats suivants :

L'intervalle I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\longmapsto a^+} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\longmapsto a^+} f(x)\right[$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\longrightarrow b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow b^-} f(x), f(a)\right]$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x), \lim\limits_{x\longrightarrow b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow b^-} f(x), \lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)\right[$
$[a,+\infty[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x), f(a)\right]$
$]a,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x), \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x), \lim\limits_{x\longrightarrow a^+} f(x)\right[$
$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\longmapsto -\infty} f(x), f(a)\right]$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)\right[$
$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x), \lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\longrightarrow a^-} f(x), \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)\right[$

Exemple 20 .

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$.

On a : $D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ et $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+3 = 5 > 0$. La fonction f est donc continue et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$. Il en découle donc les résultats suivants :

$$f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[-3, \frac{-1}{2}\right] \quad , \quad f([-2,-1[) = \left[f(-2), \lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x)\right[= [7,+\infty[$$

$$f(]-1,1]) = \left]\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x), f(1)\right] = \left]-\infty, \frac{-1}{2}\right] \quad , \quad f([2,+\infty[) = \left[f(2), \lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x)\right[= \left[\frac{1}{3}, 2\right[$$

Remarque 21 .

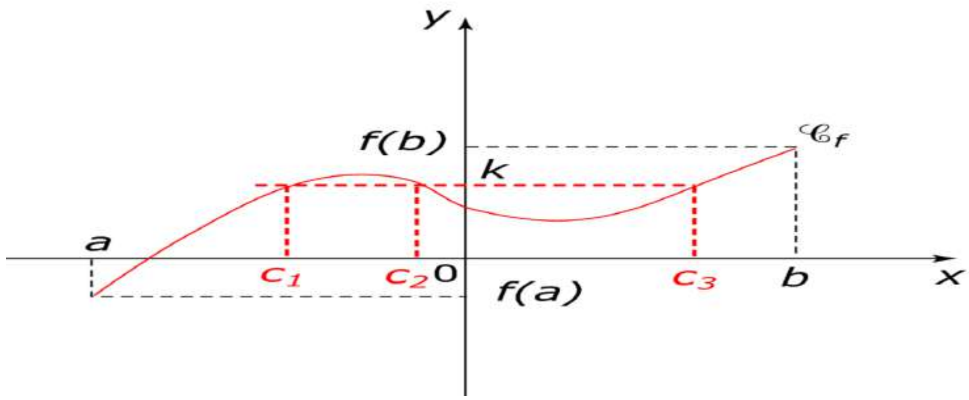
Si f n'est pas strictement monotone sur l'intervalle I, on peut utiliser les propriétés précédentes en subdivisant l'intervalle I en intervalles où f est strictement monotone et on utilise la propriété : $f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) \cup f(I_2)$.

Théorème des valeurs intermédieres TVI

Théorème 22 $(T.V.I)$

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ ***admet au moins une solution*** *dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.*



Exemple 23 .

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = x + \cos x$.

La fonction f est continue sur $[0, \pi]$ et de plus $f(0) = 1$ et $f(\pi) = \pi - 1$.

Comme 2 est compris entre $f(0)$ et $f(\pi)$ alors il existe au moins un réel $c \in [0, \pi]$ tel que : $f(c) = 2$.

Cela signifie que l'équation $x + \cos x = 2$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Corollaire 24 .

Si la fonction f est continue sur $[a, b]$ tel que $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$. Si de plus la fonction f est strictement monotone, cette solution est unique.

Exemple 25 .

Montrons que l'équation $\sqrt{x} - x^3 + 2x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$.

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = \sqrt{x} - x^3 + 2x - 1$.

♣ *Les fonctions $u : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $v : x \longmapsto -x^3 + 2x - 1$ sont continues sur $[0, 1]$ donc la fonction $f = u + v$ est continue sur $[0, 1]$.*

♣ *On a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc $f(0) \times f(1) < 0$.*

D'après le théorème des valeurs intermédiares, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$.

D'où, l'équation $\sqrt{x} - x^3 + 2x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$.

Exemple 26 .

Montrons que l'équation $\sin x + x - 1 = 0$ *admet une unique solution dans l'intervalle* $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[$:

Soit f *la fonction* f *définie sur* $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ *par :* $f(x) = \sin x + x - 1$

♣ *Les fonctions* $u : x \longmapsto \sin x$ *et* $v : x \longmapsto x - 1$ *sont continues sur* $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ *donc la fonction* $f = u + v$ *est continue sur* $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

♣ *On a :* $f(0) = -1$ *et* $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi - 1}{6}$, *donc* $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$.

♣ *La fonction* f *est dérivable sur* $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ *et on a* $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right)$, $f'(x) = \cos x + 1$, *puisque* $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right)$, $f'(x) > 0$ *donc* f *est strictement croissante sur* $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiares, l'équation $f(x) = 0$ *admet une unique solution dans* $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

D'où, l'équation $\sin x + x - 1 = 0$ *admet une solution unique dans l'intervalle* $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[$.

Principe de la méthode de dichotomie

Exemple 27 .

Soit f *la fonction définie par :* $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$

La fonction f *est continue et strictement croissante sur* $[0, 1]$ *et on a* $f(0) \times f(1) < 0$. *Donc l'équation* $f(x) = 0$ *admet une solution unique* α *tel que* $0 < \alpha < 1$. *Déterminons un encadrement de* α *de longueur* $0,25$.

Le centre du $[0, 1]$ *est* $\frac{1}{2}$ *et on a* $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-9}{8}$. *Donc* $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$ *et* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. $\left(\textit{Longueur } 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\right)$

Le centre du $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *est* $\frac{3}{4}$ *et on a* $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{-17}{64}$. *Donc* $f(1) \times f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$ *et* $\frac{3}{4} < \alpha < 1$. $\left(\textit{Longueur } 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0,25\right)$.

Ainsi $\frac{3}{4} < \alpha < 1$.

Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone.

Théorème de la fonction réciproque

Théorème 28 .

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $f(I)$.

Exemple 29 .

Soit f la fonction numérique définie sur $I =]-1, 1[$ par : $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur J à déterminer.

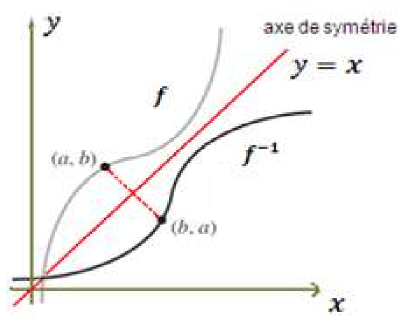
La fonction f étant continue et dérivable sur I c'est la restriction d'une fonction rationnelle et on a pour tout $x \in I$: $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$. Il s'ensuit donc que $(\forall x \in I)$, $f'(x) > 0$. Comme la fonction f est continue et strictement croissante sur I alors la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$ avec : $J = f(I) = \left] \lim\limits_{x \longrightarrow (-1)^+} f(x), \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Propriétés de la fonction réciproque

Propriété 30 .

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f^{-1} est sa fonction réciproque, alors :

- ♣ *f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(I)$.*
- ♣ *f^{-1} est strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ (de même monotonie que f sur I)*
- ♣ *Les courbes de deux fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$ dans un repère orthonormé.*



Remarque 31 *A remarquer que la symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes les symétriques, les tangentes et demi-tangentes...*

Fonction racine n^{iéme}

Definition 32 .

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$, la fonction $u : x \longmapsto x^n$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction réciproque u^{-1} de $u(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$. La fonction réciproque u^{-1} s'appelle la fonction racine n-iéme et se note $\sqrt[n]{\ }$.

Propriété 33 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

♣ *On a alors pour tous x et y de $\mathbb{R}^+$:*

$$\sqrt[n]{x} = y \iff y^n = x, \qquad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \iff x = y \ , \qquad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \iff x < y$$

♣ *On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:* $\quad \sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x.$

♣ *La fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de plus :* $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$

Remarque 34 .

Soit a un réel non nul et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $x^n = a$ dépend de signe du nombre a et de la parité de l'entier n. Le tableau résume les cas possibles

	n *pair*	n *impair*
$a > 0$	$S = \{-\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$
$a < 0$	$S = \phi$	$S = \{-\sqrt[n]{a}\}$

Exemple 35 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(E_1) : x^4 = 5$
2. $(E_2) : (x+1)^5 = 32$
3. $(E_3) : (2x-3)^4 = 16$
4. $(E_4) : \sqrt[3]{3+5x} = 2$

♣ *Soit $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$x^4 = 5 \iff x = \sqrt[4]{5} \quad ou \quad x = -\sqrt[4]{5}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est :

$$S = \left\{-\sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{5}\right\}$$

♣ *Soit $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} (E_2) \quad &\iff \quad (x+1)^5 = 2^5 \\ &\iff \quad x+1 = 2 \\ &\iff \quad x = 1 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est :

$$S = \{1\}$$

♣ *Soit $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{array}{rcl} (E_3) & \Longleftrightarrow & (2x-3)^4 = 2^4 \\ & \Longleftrightarrow & 2x-3=2 \quad ou \quad 2x-3=-2 \\ & \Longleftrightarrow & x = \dfrac{1}{2} \quad ou \quad x = \dfrac{5}{2} \end{array}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) est :

$$S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$$

♣ *On cherche lensemble de définition de l'équation (E_4) :*

On a

$$\begin{array}{rcl} D_{(E_4)} & = & \{x \in \mathbb{R} \ / \ \ 3+5x \geq 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \ / \ \ 5x \geq -3\} \\ & = & \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \ x \geq \dfrac{-3}{5}\right\} \\ & = & \left[\dfrac{-3}{5}, +\infty\right[\end{array}$$

Soit $x \in \left[\dfrac{-3}{5}, +\infty\right[$, on a

$$\begin{array}{rcl} (E_4) & \Longleftrightarrow & 3+5x = 2^3 \\ & \Longleftrightarrow & 5x = 5 \\ & \Longleftrightarrow & x = 1 \end{array}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) est :

$$S = \{1\}$$

Propriété 36 .

Soit a et b deux réels, et p et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
On a alors les propriétés suivantes :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b} \quad , \quad \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \quad (avec\ a \neq 0)\,, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (avec\ b \neq 0)$$

$$\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a} \quad , \quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} \quad , \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$$

Exemple 37 .

1. *Simplifions le nombre* $A = \dfrac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt{\sqrt[4]{144}}}$

   On a

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt{\sqrt[4]{144}}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{2^5} \times \sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[4]{2^2 \times 3^3}}{\sqrt[8]{2^4 \times 3^2}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{2^4 \times 2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt{2} \times \sqrt[8]{3^2}} \\ &= \frac{2\sqrt[4]{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt{2} \times \sqrt[4]{3}} \\ &= 2\sqrt[4]{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \\ &= 6\sqrt[4]{2} \end{aligned}$$

2. *Comparer :* $\sqrt[3]{\sqrt[5]{5}}$ *et* $\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}}$

   On a $\sqrt[3]{\sqrt[5]{5}} = \sqrt[15]{5}$ *et* $\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[15]{3}$ *et comme la fonction* $t \longmapsto \sqrt[15]{t}$ *est strictement croissante sur* $[0, +\infty[$ *donc*

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} < \sqrt[3]{\sqrt[5]{5}}$$

Propriété 38 .

Soit u *une fonction positive sur un intervalle ouvert* I *et* $x_0 \in I$.

1. *Si* u *est continue sur* I *alors la fonction* $\sqrt[n]{u}$ *est continue sur* I.
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = +\infty$
3. *Si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} u(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$.
4. *Si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} u(x) = l \geq 0$ *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$.

Exemple 39 .

On sait que : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ *et* $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. *Il en résulte :* $a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$ *et* $a + b = \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$.

Par suite

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^*_+), \quad \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^*_+), \quad \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

Calculons les limites suivantes : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x - 1}$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{1}{x - 1}\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 1}\right)$

♠

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

♠

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1} &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

♣

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{x-1}\left(\sqrt[3]{x^4+x^2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right) &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{(x^3+x^2)-(x^3+1)}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+\sqrt[3]{x^3+x^2}\times\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1}}\right. \\
&= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+\sqrt[3]{x^3+x^2}\times\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1}}\right. \\
&= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+\sqrt[3]{x^3+x^2}\times\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1}}\right. \\
&= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+\sqrt[3]{x^3+x^2}\times\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}+\sqrt[3]{x^3+x^2}\times\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{(x^3+1)^2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{2^3}}{3\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2^3}{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}
\end{aligned}$$

Remarque 40 .

On sait que : $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$, *il en résultat que :* $a - b = \dfrac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$ *par suite*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}_+^*), \ \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

Exemple 41 .

Calculons la limite suivante : $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} &= \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)\left(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x} + 1\right)}{(x - 1)\left(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1\right)} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{(x + 1)\left(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2} + \sqrt[4]{x} + 1\right)}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1} \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Puissance rationnelle d'un nombre strictement positif

Definition 42 .

Soit a *un réel strictement positif et* r *un nombre rationnel. On pose* $r = \dfrac{p}{q}$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$. *Le nombre* a^r *est le nombre* $\sqrt[q]{a^p}$. *Ce nombre est appelé la puissance rationnelle de nombre* a *d'exposant* r.

Remarque 43 .

Soit a *un réel strictement positif et* $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

On a : $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ *et* $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$. *De façon générale, on a l'égalité :* $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Propriété 44 .

Soit a *et* b *deux réels strictement positifs, et* r , r' *deux nombres rationnels. Alors on a les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned}
a^r \times a^{r'} &= a^{r+r'}, \qquad (ab)^r = a^r.b^r, \qquad (a^r)^{r'} = a^{rr'} \\
a^{-r} &= \frac{1}{a^r}, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \quad , \qquad \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}
\end{aligned}$$

Exemple 45 .

Simplifions le nombre : $A = \dfrac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6}}$

On a

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt[4]{32}\times\sqrt[6]{27}\times\sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6}} \\
&= \frac{(2^5)^{\frac{1}{4}}\times(3^3)^{\frac{1}{6}}\times(2^2\times3^3)^{\frac{1}{4}}}{(2\times3)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{2^{\frac{5}{4}}\times3^{\frac{3}{6}}\times2^{\frac{2}{4}}\times3^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{2^{\frac{5}{4}}\times3^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{4}}} \\
&= 2^{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} \\
&= 2^{\frac{3}{2}}\times3 \\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com