# Correction de la série

**EXERCICE 1** .

♣ *La proposition* $P_1$ *est vraie* $($*par exemple* $7 \in \mathbb{N}$ *et* $7^2 > 7)$.

♣ *La proposition* $P_2$ *est vraie, il suffit de prendre* $x = 0$ *et on trouve* $|0| \leq 0$.

♣ *On a* $0 \in \mathbb{R}^+$ *mais* $0 + \sqrt{0} = 0 < 2$, *alors la proposition* $P_3$ *est fausse.*

♣ *On a* $-1 \in \mathbb{R}^*$ *mais* $-1 + \dfrac{1}{-1} < 2$, *alors la proposition* $P_4$ *est fausse.*

♣ *Puisque les solutions de l'équation* $x^2 = 9$ *sont* $-3$ *et* $3$ *et comme* $-3 \in \mathbb{Q}$ *et* $3 \in \mathbb{Q}$ , *alors la proposition* $P_5$ *est vraie.*

♣ *Soit* $x \in \mathbb{Z}$, *existe-t-il* $y$ *dans* $\mathbb{Z}$ *tel que :* $x - y = 3$ ?

*on a :* $x - y = 3$ *alors* $y = x - 3 \in \mathbb{Z}$ . *Donc la proposition* $P_6$ *est vraie.*

♣ *Soit* $x \in \mathbb{R}$, *existe-t-il* $y$ *dans* $]-\infty, 1[$ *tel que :* $3x^2y - x + y = 0$ ?

*On a*

$$\begin{aligned} 3x^2y - x + y &= 0 \\ &\iff y\left(3x^2+1\right) = x \\ &\iff y = \frac{x}{3x^2+1} \end{aligned}$$

*il reste à montrer que* $y < 1$

*On a*

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{x}{3x^2+1} - 1 \\ &= \frac{x - 3x^2 - 1}{3x^2+1} \\ &= -\left(\frac{3x^2 - x + 1}{3x^2+1}\right) \end{aligned}$$

*on a* $(\forall x \in \mathbb{R})$, $3x^2 - x + 1 > 0$ $($*car* $\Delta = -11$ *et* $a > 0$ $(a = 3))$ *et* $3x^2 + 1 > 0$ *donc* $y - 1 < 0$ *c'est-à-dire* $y < 1$, *par suite la proposition* $P_7$ *est vraie.*

♣ *Soit* $x \in [0,2]$, *existe-t-il* $y$ *dans* $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ *tel que :* $xy - x + 2y - 1 = 0$ ?

*On a*

$$\begin{array}{rcl} xy - x + 2y - 1 & = & 0 \\ & \Longleftrightarrow & xy + 2y = 1 + x \\ & \Longleftrightarrow & y\,(x+2) = 1 + x \\ & \Longleftrightarrow & y = \dfrac{1+x}{x+2} \\ & \Longleftrightarrow & y = 1 - \dfrac{1}{x+2} \end{array}$$

*comme* $0 \leq x \leq 2$ *alors* $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2}$ *donc* $1 - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{x+2} \leq 1 - \frac{1}{4}$ *d'où* $y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, *par suite la proposition* $P_8$ *est vraie.*

♣ *Il suffit de prendre* $x = -1$, *ainsi pour tout* $y \in \mathbb{R}$, $-1 < y^2$, *la proposition* $P_9$ *est vraie.*

**EXERCICE 2** .

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + 3x + 2 = 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ \ 2x + 1 = 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + 2x + 3 \neq 0$ *ou* $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2 + 2x + 3 \neq 0.$

**EXERCICE 3** .

1. *Montrons que :* $x > 2$ *et* $y \geq \frac{1}{3} \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{7}{2}$

   *On a*

$$\begin{array}{rcl} x & > & 2 \ \ et \ \ y \geq \dfrac{1}{3} \\ & \Longrightarrow & 0 \leq \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2} \ \ et \ \ 0 \leq \dfrac{1}{y} \leq 3 \\ & \Longrightarrow & 0 \leq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{2} + 3 \\ & \Longrightarrow & 0 \leq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} < \dfrac{7}{2} \end{array}$$

   *donc*

$$x > 2 \ \ et \ \ y \geq \frac{1}{3} \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{7}{2}$$

2. *Montrons que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leq 2 \implies |x^2+x-2| \leq 10$

*Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Supposons que* $|x-1| \leq 2$. *Montrons que :* $|x^2+x-2| \leq 10$

*On a :* $x^2+x-2 = x^2-1+x-1 = (x-1)(x+2)$, *alors*

$$\left|x^2+x-2\right| = |(x-1)(x+2)| = |x-1|\,|x+2|$$

*comme* $|x-1| \leq 2$ *alors* $-2 \leq x-1 \leq 2$ *donc* $1 \leq x+2 \leq 5$ *et comme* $-5 \leq 1$ *alors* $-5 \leq x+2 \leq 5$ *donc*

$$|x+2| \leq 5$$

*or* $|x-1| \leq 2$ *donc* $|x-1|\,|x+2| \leq 2 \times 5$ *d'où* $|x^2+x-2| \leq 10$.

*Donc*

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq 2 \implies \left|x^2+x-2\right| \leq 10$$

3. *Montrons que :* $(\forall x \in \mathbb{R}),\ |x-2| \leq 1 \implies \left|\dfrac{2x+3}{x+2}\right| \leq 3$

*Soit* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{array}{rcl}
|x-2| & \leq & 1 \\
& \implies & -1 \leq x-2 \leq 1 \\
& \implies & 1 \leq x \leq 3 \\
& \implies & 5 \leq 2x+3 \leq 9 \quad et \quad 3 \leq x+2 \leq 5 \\
& \implies & 5 \leq 2x+3 \leq 9 \quad et \quad \dfrac{1}{5} \leq \dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{1}{3} \\
& \implies & 5 \times \dfrac{1}{5} \leq (2x+3) \times \dfrac{1}{x+2} \leq 9 \times \dfrac{1}{3} \\
& \implies & 1 \leq \dfrac{2x+3}{x+2} \leq 3 \\
& \implies & \left|\dfrac{2x+3}{x+2}\right| \leq 3
\end{array}$$

*donc*

$$(\forall x \in \mathbb{R}), |x-2| \leq 1 \implies \left|\frac{2x+3}{x+2}\right| \leq 3$$

**EXERCICE 4** .

1. *Montrons que :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x^2+y^2=0 \iff x=y=0$

*Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *montrons l'équivalence suivante en raisonnant par double implication*

$$\overbrace{x^2+y^2=0}^{p} \iff \overbrace{x=y=0}^{q}$$

♣ $(q \implies p)$ *Supposons* $q$, *c'est-à-dire* $x=y=0$. *Montrons* $p$ *:*
*On a* $x^2+y^2 = 0^2+0^2 = 0$.

♣ $(p \implies q)$ *Supposons* $p$*, c'est-à-dire* $x^2+y^2=0$*. Montrons* $q$ *:*

*On a* $x^2+y^2=0$ *alors* $\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-y^2}_{\leq 0}$*, d'où* $x=y=0$.

*Donc*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=0 \iff x=y=0$$

2. *Montrons que :* $\forall (x,y) \in ([0,+\infty[)^2,\ \ \sqrt{x}+\sqrt{y} = \dfrac{x+y+2}{2} \iff x=1$ *et* $y=1$.

*Soit* $(x,y) \in ([0,+\infty[)^2$*, on a*

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}+\sqrt{y} &= \frac{x+y+2}{2} \\
&\iff 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) = x+y+2 \\
&\iff 2\sqrt{x}+2\sqrt{y}-x-y-2=0 \\
&\iff -x+2\sqrt{x}-1-y+2\sqrt{y}-1=0 \\
&\iff -\left(x-2\sqrt{x}+1\right)-\left(y-2\sqrt{y}+1\right)=0 \\
&\iff -\left(\sqrt{x^2}-2\sqrt{x}+1\right)-\left(\sqrt{y^2}-2\sqrt{y}+1\right)=0 \\
&\iff -\left(\sqrt{x}-1\right)^2-\left(\sqrt{y}-1\right)^2=0 \\
&\iff \left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y}-1\right)^2=0 \\
&\iff \sqrt{x}-1=0 \quad \textit{et} \quad \sqrt{y}-1=0 \\
&\iff \sqrt{x}=1 \quad \textit{et} \quad \sqrt{y}=1 \\
&\iff x=1 \quad \textit{et} \quad y=1
\end{aligned}$$

*donc*

$$\forall (x,y) \in ([0,+\infty[)^2,\ \sqrt{x}+\sqrt{y} = \frac{x+y+2}{2} \iff x=1 \quad \textit{et} \quad y=1.$$

3. *Montrons que :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \iff x+y=0.$

*Montrons l'équivalence suivante en raisonnant par double implication*

$$\overbrace{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1}^{p} \iff \overbrace{x+y=0}^{q}$$

*Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

♣ $(q \implies p)$ *Supposons* $q$*, c'est-à-dire* $x+y=0$*. Montrons :* $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$.

*On a* $x+y=0$ *alors* $y=-x$

*on a*

$$\begin{aligned}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) &= \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)\\ &= -\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\\ &= -\left(x^2-\left(x^2+1\right)\right)\\ &= -\left(x^2-x^2-1\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

♣ $(p \implies q)$ *Supposons* $p$, *c'est-à-dire* $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$. *Montrons* : $x+y=0$.

*On a* $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ *alors*

$$\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$$

*par suite* $\left(x^2-x^2-1\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$ *donc*

$$-y-\sqrt{y^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}$$

*d'où*

$$x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1} \quad (♠)$$

*On a* $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ *alors*

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)=\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)$$

*par suite* $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y^2-y^2-1\right)=\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)$ *donc*

$$-x-\sqrt{x^2+1}=y-\sqrt{y^2+1}$$

*d'où*

$$x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1} \qquad (♠♠)$$

*D'après* (♠) *et* (♠♠) *on a* $\begin{cases} x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1} \\ \\ x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}\end{cases}$

*alors* $2(x+y)=\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right)+\left(\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$ *donc*

$$x+y=0$$

*d'où*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \iff \quad x+y=0$$

4. *Montrons que* : $\forall\,(a,b)\in([0,+\infty[)^2,\ \ \sqrt{a}+\sqrt{b}-1=\dfrac{a+b}{2}\iff a=b=1$

*Soit* $(a,b)\in([0,+\infty[)^2$ , *on a*

$$\begin{aligned}
\sqrt{a}+\sqrt{b}-1 &= \frac{a+b}{2}\\
&\iff 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2=a+b\\
&\iff -a+2\sqrt{a}-b+2\sqrt{b}-2=0\\
&\iff -\left(a-2\sqrt{a}+1\right)-\left(b-2\sqrt{b}+1\right)=0\\
&\iff -\left(\sqrt{a}-1\right)^2-\left(\sqrt{b}-1\right)^2=0\\
&\iff \left(\sqrt{a}-1\right)^2+\left(\sqrt{b}-1\right)^2=0\\
&\iff \sqrt{a}-1=0\ \ et\ \ \sqrt{b}-1=0\\
&\iff a=1\ \ et\ \ b=1
\end{aligned}$$

*donc*

$$\forall\,(a,b)\in([0,+\infty[)^2,\ \sqrt{a}+\sqrt{b}-1=\frac{a+b}{2}\iff a=b=1$$

5. *Montrons que* : $\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\ \sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\iff x=1$

*Soit* $x\in\,]0,+\infty[$ , *on a*

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+2}-\sqrt{x} &= 1\\
&\iff \sqrt{2x+2}=1+\sqrt{x}\\
&\iff 2x+2=1+2\sqrt{x}+x\\
&\iff x+1=2\sqrt{x}\\
&\iff (x+1)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2\\
&\iff x^2+2x+1=4x\\
&\iff x^2-2x+1=0\\
&\iff (x-1)^2=0\\
&\iff x=1
\end{aligned}$$

*donc*

$$\forall x\in\,]0,+\infty[\,,\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1\iff x=1$$

6. *Montrons que* : $\forall\,(a,b)\in([0,+\infty[)\,,\ \ \sqrt{a+1}-\sqrt{b+1}<\sqrt{a}-\sqrt{b}\iff b<a$

*Soit* $(a,b) \in ([0,+\infty[)^2$ *, on a*

$$\begin{array}{rcl}\sqrt{a+1}-\sqrt{b+1} & < & \sqrt{a}-\sqrt{b} \\ & \Longleftrightarrow & \sqrt{a+1}+\sqrt{b} < \sqrt{a}+\sqrt{b+1} \\ & \Longleftrightarrow & \left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b}\right)^2 < \left(\sqrt{a}+\sqrt{b+1}\right)^2 \\ & \Longleftrightarrow & (a+1)+2\sqrt{(a+1)\,b}+b < a+2\sqrt{(b+1)\,a}+(b+1) \\ & \Longleftrightarrow & 2\sqrt{(a+1)\,b} < 2\sqrt{(b+1)\,a} \\ & \Longleftrightarrow & \sqrt{(a+1)\,b} < \sqrt{(b+1)\,a} \\ & \Longleftrightarrow & (a+1)\,b < (b+1)\,a \\ & \Longleftrightarrow & ab+b < ab+a \\ & \Longleftrightarrow & b < a\end{array}$$

*Donc*

$$\forall\,(a,b) \in ([0,+\infty[)^2\,,\quad \sqrt{a+1}-\sqrt{b+1} < \sqrt{a}-\sqrt{b} \iff b < a$$

7. *Montrons que :* $x < y \iff \dfrac{x}{y} < \dfrac{2x+5y}{5x+2y} < \dfrac{y}{x}.$

   *Soient* $x$ *et* $y$ *deux réels strictement positif, on a*

$$\begin{array}{rcl}\dfrac{x}{y} & < & \dfrac{2x+5y}{5x+2y} < \dfrac{y}{x} \\ & \Longleftrightarrow & x^2 < \dfrac{xy\,(2x+5y)}{5x+2y} < y^2 \\ & \Longleftrightarrow & x^2\,(5x+2y) < xy\,(2x+5y) < y^2\,(5x+2y) \\ & \Longleftrightarrow & 5x^3+2yx^2 < 2x^2y+5xy^2 < 5xy^2+2y^3 \\ & \Longleftrightarrow & 5x^3+2yx^2 < 2x^2y+5xy^2 \quad et \quad 2x^2y+5xy^2 < 5xy^2+2y^3 \\ & \Longleftrightarrow & 5x^3 < 5xy^2 \quad et \quad 2x^2y < 2y^3 \\ & \Longleftrightarrow & x^2 < y^2 \\ & \Longleftrightarrow & x < y\end{array}$$

   *Donc*

$$x < y \iff \frac{x}{y} < \frac{2x+5y}{5x+2y} < \frac{y}{x}$$

**EXERCICE 5** .

1. *Montrons que :* $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \implies (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

   *Soit* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, par contraposée montrons que :* $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \implies x = y$

*On a*

$$\begin{aligned}(x+1)(y-1) &= (x-1)(y+1)\\ &\Longrightarrow xy-x+y-1=xy+x-y-1\\ &\Longrightarrow -2x+2y=0\\ &\Longrightarrow 2(-x+y)=0\\ &\Longrightarrow -x+y=0\\ &\Longrightarrow x=y\end{aligned}$$

*donc*

$$(x+1)(y-1)=(x-1)(y+1) \Longrightarrow x=y$$

*D'où par contraposée*

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, x\neq y \Longrightarrow (x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1)$$

2. *Montrons que :* $n^2$ *est un multiple de* $3 \Longrightarrow n$ *est un multiple de* $3$.

   *Soit* $n\in\mathbb{N}$, *par contraposée montrons que :* $n$ *n'est pas un multiple de* $3 \Longrightarrow n^2$ *n'est pas un multiple de* $3$.

   *On suppose que* $n$ *n'est pas un multiple de* $3$. *On distingue* $2$ *cas lorsque* $n=3k+1$ *ou* $n=3k+2$ *tel que* $k\in\mathbb{N}$.

   ♣ Si $n=3k+1$, *alors*

$$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3\left(3k^2+2k\right)+1$$

   *et comme* $(3k^2+2k)\in\mathbb{N}$, *donc ceci signifie que* $n^2$ *n'est pas un multiple de* $3$.

   ♣ Si $n=3k+2$, *alors*

$$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3\left(3k^2+4k+1\right)+1$$

   *et comme* $(3k^2+4k+1)\in\mathbb{N}$, *donc ceci signifie que* $n^2$ *n'est pas un multiple de* $3$.

   *On conclut que dans les deux cas* $n^2$ *n'est pas un multiple de* $3$. *Ceci signifie que*

$$n \text{ n'est pas un multiple de } 3 \Longrightarrow n^2 \text{n'est pas un multiple de } 3.$$

   *D'où par contraposée*

$$n^2 \text{ est un multiple de } 3 \Longrightarrow n \text{ est un multiple de } 3.$$

**EXERCICE 6** .

1. *Montrons que :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^4+3x^2+1} \geq x^2+1$

   *Soit* $x \in \mathbb{R},$ *on a*

$$\begin{aligned}\sqrt{x^4+3x^2+1} &\geq x^2+1 \\ &\iff x^4+3x^2+1 \geq \left(x^2+1\right)^2 \\ &\iff x^4+3x^2+1 \geq x^4+2x^2+1 \\ &\iff x^2 \geq 0\end{aligned}$$

   *et comme* $x^2 \geq 0$ *est une proposition vraie, alors*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^4+3x^2+1} \geq x^2+1$$

2. *Soit* $(a,b) \in ([0,+\infty[)^2$ *, on a*

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \iff \sqrt{a^2} - 2\sqrt{ab} + \sqrt{b^2} \geq 0 \iff \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

   *comme* $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ *est une proposition vraie , alors*

$$\forall (a,b) \in ([0,+\infty[)^2, \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

3. *Montrons que :* $\forall (a,b) \in (]0,+\infty[)^2,\ \dfrac{a^2}{a+b} \geq \dfrac{3a-b}{4}.$

   *Soit* $(a,b) \in (]0,+\infty[)^2$ *, on a*

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+b} &\geq \frac{3a-b}{4} \iff \frac{a^2}{a+b} - \frac{3a-b}{4} \geq 0 \\ &\iff \frac{4a^2-3a^2-3ab+ab+b^2}{4(a+b)} \geq 0 \\ &\iff \frac{a^2-2ab+b^2}{4(a+b)} \geq 0 \\ &\iff \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geq 0\end{aligned}$$

   *et comme* $\dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geq 0$ *est une proposition vraie , alors*

$$\forall (a,b) \in (]0,+\infty[)^2,\ \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}.$$

**EXERCICE 7** .

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $n^2+1$ n'est pas un carré parfait.*

   *Par l'absurde, supposons que $n^2+1$ est un carré parfait, donc il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^2+1 = m^2$*

   *On a : $n^2 < n^2+1$ et $n^2+1 < (n+1)^2$, c'est-à-dire : $n^2 < n^2+1 < (n+1)^2$. $\left(\text{car } (n+1)^2 - n^2 - 1 = 2n > 0\right)$*

   *Donc : $n^2 < m^2 < (n+1)^2$, par suite $n < m < (n+1)$.*

   *C'est-à-dire il existe un entier naturel strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est contradictoire. Donc $n^2+1$ n'est pas un carré parfait pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

2. *Montrons que : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.*

   *Par l'absurde supposons que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.*

   *Donc il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$ avec $PGCD\,(p,q) = 1$.*

   *En élevant l'égalité au carré nous obtenous $q^2 \times 3 = p^2$. Donc $p^2$ est un multiple de 3, cela implique que $p$ est un multiple de 3. Donc $p = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$, d'où $q^2 \times 3 = 9k^2$ alors $q^2 = 3k^2$. Nous en déduisons maintenant que $q^2$ est un multiple de 3 et comme ci-dessus que $q$ est multiple de 3, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $PGCD(p,q) = 1$. Donc*

   $$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$

3. *Montrons que : $\sqrt{4n^2+5n+3} \notin \mathbb{N}$.*

   *Par l'absurde, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\sqrt{4n^2+5n+3} \in \mathbb{N}$.*

   $$\exists m \in \mathbb{N},\ \sqrt{4n^2+5n+3} = m$$

   *alors $4n^2+5n+3 = m^2$ et comme $(2n+1)^2 < 4n^2+5n+3$ et $4n^2+5n+3 < (2n+2)^2$, c'est-à-dire*

   $$(2n+1)^2 < 4n^2+5n+3 < (2n+2)^2$$

   *donc*

   $$(2n+1) < \sqrt{4n^2+5n+3} < (2n+2)$$

   *D'où*

   $$(2n+1) < m < (2n+2)$$

   *C'est une contradiction car on peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs $(2n+1)$ et $(2n+2)$.*

   *Ceci signifie que*

   $$(\forall n \in \mathbb{N}),\ \sqrt{4n^2+5n+3} \notin \mathbb{N}$$

4. *Démontrons que si $a$ et $b$ sont deux entiers relatifs tels que $a+b\sqrt{2} = 0$ alors $a = b = 0$.*

   *Raisonnons par l'absurde. Supposons que $a+b\sqrt{2} = 0$ et $(a,b) \neq (0,0)$.*

   *On a $a+b\sqrt{2} = 0$ alors $\sqrt{2} = \dfrac{-a}{b} \in \mathbb{Q}$. Or $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ce qui est contradictoire. Donc $a = b = 0$.*

5. *Raisonnons par l'absurde. Supposons que $n$ est le carré d'un entier, et que $2n$ est lui aussi le carré d'un entier.*

   *Alors $n$ s'écrit $n = p^2$ et $2n$ s'écrit $2n = q^2$. Alors, en faisant le quotient, on a $2 = \dfrac{q^2}{p^2}$ et en prenant la racine carrée, $\sqrt{2} = \dfrac{q}{p}$. Or $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a une contradiction !*

**EXERCICE 8** .

1. *On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : |2x^2 - x - 6| - |x + 1| - 1 = 0$.*

   *On résout d'abord les équations : $2x^2 - x - 6 = 0$ et $x + 1 = 0$.*

   ♠ *Les solutions de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$ dans $\mathbb{R}$ sont : 2 et $\dfrac{-3}{2}$.*

   ♠ *L'équation $x + 1 = 0$ admet unique solution $-1$.*

   *Donc*

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-3}{2}$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x2-x-6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |

   ♣ Si $x \in \left]-\infty, \dfrac{-3}{2}\right]$, *alors* $|2x^2 - x - 6| = 2x^2 - x - 6$ *et* $|x + 1| = -(x + 1)$ *donc*

$$\begin{aligned} (E) \iff & \big(2x^2 - x - 6\big) + (x + 1) - 1 = 0 \\ \iff & 2x^2 - 6 = 0 \\ \iff & 2x^2 - 6 = 0 \\ \iff & x^2 = 3 \\ \iff & x = \sqrt{3} \quad ou \quad x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

   *et comme* $-\sqrt{3} \notin \left]-\infty, \dfrac{-3}{2}\right]$ *et* $\sqrt{3} \notin \left]-\infty, \dfrac{-3}{2}\right]$ *donc*

$$S_1 = \varnothing$$

   ♣ Si $x \in \left[\dfrac{-3}{2}, -1\right]$, *alors* $|2x^2 - x - 6| = -(2x^2 - x - 6)$ *et* $|x + 1| = -(x + 1)$ *donc*

$$\begin{aligned} (E) \iff & -\big(2x^2 - x - 6\big) + (x + 1) - 1 = 0 \\ \iff & -2x^2 + 2x + 6 = 0 \end{aligned}$$

*L'équation admet deux solutions distinctes* $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ *et* $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$.
*Comme* $x_1 \notin \left[\dfrac{-3}{2}, -1\right]$. *Donc*

$$S_2 = \left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$$

♣ Si $x \in [-1, 2]$, *alors* $|2x^2 - x - 6| = -(2x^2 - x - 6)$ *et* $|x+1| = (x+1)$ *donc*

$$\begin{array}{lcl} (E) & \Longleftrightarrow & -\left(2x^2 - x - 6\right) - (x+1) - 1 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & 4 - 2x^2 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x = \sqrt{2} \quad ou\; x = -\sqrt{2} \end{array}$$

*Donc*

$$S_3 = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$$

♣ Si $x \in [2, +\infty[$ *alors* $|2x^2 - x - 6| = 2x^2 - x - 6$ *et* $|x+1| = x+1$ *donc*

$$\begin{array}{lcl} (E) & \Longleftrightarrow & \left(2x^2 - x - 6\right) - (x+1) - 1 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & 2x^2 - 2x - 8 = 0 \end{array}$$

*L'équation admet deux solutions distinctes* $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ *et* $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$.
*Comme* $x_2 \notin [2, +\infty[$. *Donc*

$$S_4 = \left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

*Donc l'ensemble des solutions de l'équation* $(E)$ *est* :

$$\begin{array}{lcl} S & = & S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \\ & = & \left\{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}, -3\right\} \end{array}$$

2. *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E') : \sqrt{3x+4} = x$.
   *On cherche l'ensemble de définition de l'équation* $(E_3)$.

$$\begin{array}{lcl} D_{(E')} & = & \{x \in \mathbb{R} / \; 3x + 4 \geq 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} / \; 3x \geq -4\} \\ & = & \left\{x \in \mathbb{R} / \; x \geq \dfrac{-4}{3}\right\} \\ & = & \left[\dfrac{-4}{3}, +\infty\right[ \end{array}$$

*Soit* $x \in \left[\frac{-4}{3}, +\infty\right[$, *on a*

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+4} &= x \\ &\iff 3x+4 = x^2 \quad , \ et \quad x \geq 0 \\ &\iff -x^2+3x+4=0 \ , \ et \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

*et comme* $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times (-1) \times 4 = 25 > 0$ *donc l'équation* $-x^2 + 3x + 4 = 0$ *admet* 2 *solutions réelles distinctes* $x_1$ *et* $x_2$ :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\times(-1)} = -1 \quad et \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times(-1)} = 4$$

*puisque* $-1 < 0$ *et* $4 > 0$. *Donc l'ensemble des solutions de l'équation* $(E')$ *est :*

$$S = \{4\}$$

*3.* ♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $(I_1)$ : $\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 \leq 0$.
*L'inéquation* $(I_1)$ *est définie sur* $\mathbb{R}$.
*Soit* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 \leq 0 \iff \sqrt{x^2+1} \leq 2x - 1$$

*Le tableau de signe de l'expression* $2x - 1$ :

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x-1$ | $-$ | 0 | $+$ |

♣ Si $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ *alors* $2x - 1 < 0$ *et l'inéquation n'a pas de solution puisque* $\left(\sqrt{x^2+1} > 0\right)$. *Donc*

$$S_1 = \varnothing$$

♣ Si $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ *alors* $2x - 1 \geq 0$ *donc*

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} &\leq 2x-1 \\ &\iff x^2+1 \leq (2x-1)^2 \\ &\iff x^2+1 \leq 4x^2-4x+1 \\ &\iff -3x^2+4x \leq 0 \\ &\iff x(-3x+4) \leq 0 \\ &\iff x \in \left]-\infty, 0\right[ \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[ \end{aligned}$$

*donc*

$$S_2=\left(\left]-\infty,0\right[\cup\left[\frac{4}{3},+\infty\right[\right)\cap\left[\frac{1}{2},+\infty\right[=\left[\frac{4}{3},+\infty\right[$$

*D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation* $(I_1)$ *est* :

$$S=S_1\cup S_2=\left[\frac{4}{3},+\infty\right[$$

♣ *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $(I_2)$ : $\sqrt{x-1}\geq x-7$.

*On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation* $(I_2)$.

$$\begin{aligned} D_{(I_2)} &= \{x\in\mathbb{R}/\ \ x-1\geq 0\} \\ &= [1,+\infty[\,. \end{aligned}$$

*Le tableau de signe de l'expression* $x-7$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-7$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

♣ Si $x\in[1,7[$, *alors* $x-7<0$ *donc* $\sqrt{x-1}\geq x-7$ *est vraie pour tout* $x\in[1,7[$ .
*D'où*

$$S_1=[1,7[$$

*1.* ♣ Si $x\in[7,+\infty[$, *alors* $x-7\geq 0$.
*Donc*

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &\geq x-7 \\ &\Longleftrightarrow (x-1)\geq(x-7)^2 \\ &\Longleftrightarrow (x-1)-\left(x^2-14x+49\right)\geq 0 \\ &\Longleftrightarrow -x^2+15x-50\geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x\in[5,10]\,. \end{aligned}$$

*d'où*

$$S_2=[5,10]\cap[7,+\infty[=[7,10]\,.$$

*Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation* $(I_2)$ *est* :

$$S=S_1\cup S_2=[1,10]$$

**EXERCICE 9** .

1. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}), \; n^2 < 2^n$.

   *Pour* $n = 5$*, on a* $5^2 < 2^5$*. La propositon est vraie pour* $n = 0$.

   *Soit* $n \geq 5$*. Supposons que* $n^2 < 2^n$*, et montrons que :* $(n+1)^2 < 2^{n+1}$.

   *On a* $n^2 < 2^n$ *alors* $2n^2 < 2^{n+1}$*, ainsi, il suffit de montrer que :* $(n+1)^2 < 2n^2$*, c'est-à-dire* $(n+1)^2 - 2n^2 < 0$

   *on a*

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 - 2n^2 &= \left(n^2 + 2n + 1\right) - 2n^2 \\
&= -n^2 + 2n + 1 \\
&= -n^2 + 2n - 1 + 1 + 1 \\
&= -\left(n^2 - 2n + 1\right) + 2 \\
&= -(n-1)^2 + 2
\end{aligned}$$

   *et comme* $n \geq 5$ *alors* $(n-1)^2 \geq 16$ *donc* $-(n-1)^2 + 2 < 0$ *d'où* $(n+1)^2 < 2n^2$ *et par suite* $(n+1)^2 < 2^{n+1}$.

   *Conclusion : D'après le principe de récurrence*

$$(\forall n \geq 5), \quad n^2 < 2^n.$$

2. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \; \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   *Pour* $n = 1$ *on a* $1^2 = \dfrac{(1+1)(2+1)}{6}$*, la proposition est vraie pour* $n = 1$.

   *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Supposons que* $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*, et montrons que* $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

*On a*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= 1^2+2^2+3^2+...+(n+1)^2 \\
&= 1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} +(n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \\
&= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad / \quad 2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)
\end{aligned}$$

*Conclusion* : *D'après le principe de récurrence*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. *Montrons que* : $(\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\})\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k = \dfrac{a^{2n+1}+1}{a+1}$.

*Pour* $n=0$ *on a* $1=\dfrac{a+1}{a+1}$, *la proposition est vraie pour* $n=0$.

*Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k = \dfrac{a^{2n+1}+1}{a+1}$, *et montrons que* $\sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a^k = \dfrac{a^{2n+3}+1}{a+1}$

*On a*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a^k &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k + (-1)^{2n+1} a^{2n+1} + (-1)^{2n+2} a^{2n+2} \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k}_{=\frac{a^{2n+1}+1}{a+1}} + (-1)^{2n+1} a^{2n+1} + (-1)^{2n+2} a^{2n+2} \\
&= \frac{a^{2n+1}+1}{a+1} - a^{2n+1} + a^{2n+2} \\
&= \frac{a^{2n+1}+1 - a^{2n+1}(a+1) + a^{2n+2}(a+1)}{a+1} \\
&= \frac{a^{2n+1}+1 - a^{2n+2} - a^{2n+1} + a^{2n+3} + a^{2n+2}}{a+1} \\
&= \frac{a^{2n+3}+1}{a+1}
\end{aligned}$$

*Conclusion : D'après le principe de récurrence*

$$(\forall a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\})\,(\forall n \in \mathbb{N}),\ \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k = \frac{a^{2n+1}+1}{a+1}.$$

4. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, 7 *divise* $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

*Pour* $n = 0$ *on a* 7 *divise* $(3^1 + 2^2)$, *la proposition est vraie pour* $n = 0$.

*Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* 7 *divise* $3^{2n+1}+2^{n+2}$, *et montrons que* 7 *divise* $3^{2n+3}+2^{n+3}$.

*On a* 7 *divise* $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ *c-à-d il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$

*on a*

$$\begin{aligned}
3^{2n+3} + 2^{n+3} &= 3^{2n+1} \times 3^2 + 2^{n+2} \times 2 \\
&= 3^{2n+1} \times 9 + 2^{n+2} \times 2 \\
&= 3^{2n+1} \times (7+2) + 2^{n+2} \times 2 \\
&= 3^{2n+1} \times 7 + 3^{2n+1} \times 2 + 2^{n+2} \times 2 \\
&= 3^{2n+1} \times 7 + 2\left(3^{2n+1} + 2^{n+2}\right) \\
&= 3^{2n+1} \times 7 + 2 \times 7k \\
&= 7\left(3^{2n+1} + 2k\right)
\end{aligned}$$

*et comme* $(3^{2n+1} + 2k) \in \mathbb{N}$ *,on pose* $k' = 3^{2n+1} + 2k$, *donc*

$$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 7k'$$

*d'où* 7 *divise* $3^{2n+3} + 2^{n+3}$.

*Conclusion : D'après le principe de récurrence*

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ 7 \text{ divise } 3^{2n+1} + 2^{n+2}.$$

**EXERCICE 10** .

*Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On pose :* $u_n = (1+1)^2 \times \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1+\frac{1}{5}\right)^2 \times ... \times \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2$.

*1.* **a)** *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1+1)^2 \times \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1+\frac{1}{5}\right)^2 \times ... \times \left(1+\frac{1}{2(n+1)+1}\right)^2 \\ &= (1+1)^2 \times \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1+\frac{1}{5}\right)^2 \times ... \times \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2 \\ &= \underbrace{(1+1)^2 \times \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1+\frac{1}{5}\right)^2 \times ... \times \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^2}_{=u_n} \times \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2 \\ &= u_n \times \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2 \end{aligned}$$

*Donc*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n \times \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2.$$

**b)** *Montrons que :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2n+3$.

*Pour* $n=0$, *on a* $u_0 = (1+1)^2 = 4$ *alors* $u_0 > 3$. *La proposition est vraie pour* $n=0$.

*Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_n > 2n+3$, *et montrons que :* $u_{n+1} > 2n+5$.

*On a*

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$$

*et comme* $u_n > 2n+3$, *alors* $u_n \times \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2 > (2n+3) \times \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$ *c'est-à-dire* $u_{n+1} > (2n+3) \times \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2$, *et puisque* $(2n+3) \times \left(1+\frac{1}{2n+3}\right)^2 = \frac{4(n+2)^2}{2n+3} > 2n+5$, *donc* $u_{n+1} > 2n+5$.

*Conclusion : D'après le principe de récurrence on conclut que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 2n+3$$

**2)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$, $6$ *divise* $n(n+1)(n+2)$.

*Pour* $n=0$, *on a* $6$ *divise* $0$. *La proposition est vraie pour* $n=0$.

*Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $6$ *divise* $n(n+1)(n+2)$, *et montrons que :* $6$ *divise* $(n+1)(n+2)(n+3)$.

*On a* $6$ *divise* $n(n+1)(n+2)$, *alors il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que :* $n(n+1)(n+2) = 6k$

*on a*

$$\begin{aligned}
(n+1)(n+2)(n+3) &= \underbrace{n(n+1)(n+2)}_{=6k} + 3(n+1)(n+2) \\
&= 6k + 3(n+1)(n+2) \\
&= 6k + 3\left(\underbrace{n(n+1)}_{=2p} + 2(n+1)\right) \\
&= 6k + 3(2p + 2(n+1)) \\
&= 6k + 6(p + (n+1)) \\
&= 6(k+p+n+1)
\end{aligned}$$

*et comme* $(k+p+n+1) \in \mathbb{N}$ *,on pose* $p' = k+p+n+1$ *donc*

$$(n+1)(n+2)(n+3) = 6p'.$$

*Ceci signifie que* 6 *divise* $(n+1)(n+2)(n+3)$.

*Conclusion* : *D'après le principe de récurrence*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad 6 \textit{ divise } n(n+1)(n+2).$$

**FIN**

Pr : **Yahya MATIOUI**

**www.etude − generale.com**