www.etude-generale.com **TCSI**
Matiére : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

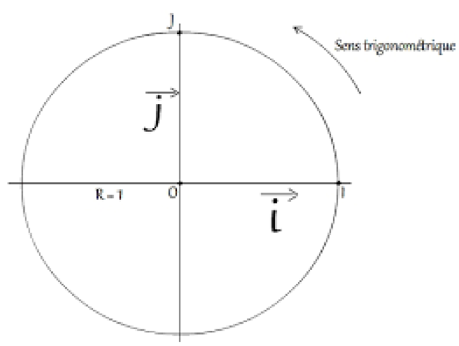
Le calcul trigonométrique

Cercle trigonométrique - Abscisses curvilignes

Définition du cercle trigonométrique

Définition 1 .
Dans un repère orthonnormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$. *On appelle cercle trigonométrique le cercle :*

- *de centre* O *l'origine du repère.*
- *de rayon* $R = 1$
- *orienté positivement.* (*Le sens positif est le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre*)
- *et admet une origine* I.



Le plan orienté

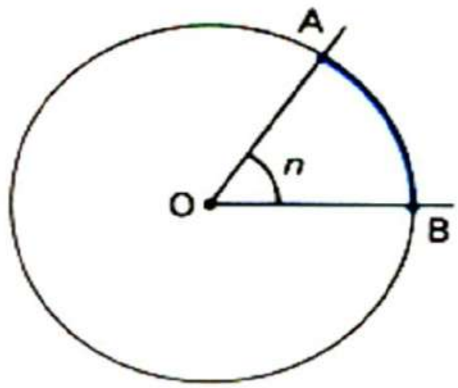
Définition 2 *Le plan est dit orienté lorsque tous les cercles sont orientés comme un cercle trigonométrique.*

Dans la suite le plan est orienté.

La mesure en radian

Définition 3 .

Le radian est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle trigonométrique.



Propriété 4 *La mesure d'un angle en radian est proportionnelle à sa mesure en degrés.*

Tableau de proportionnalité

Mesure en degré	180	n
Mesure en radian	π	α

Ceci signifie que

$$\frac{n}{\alpha} = \frac{180}{\pi}$$

Donc

$$\alpha = \frac{\pi \times n}{180}$$

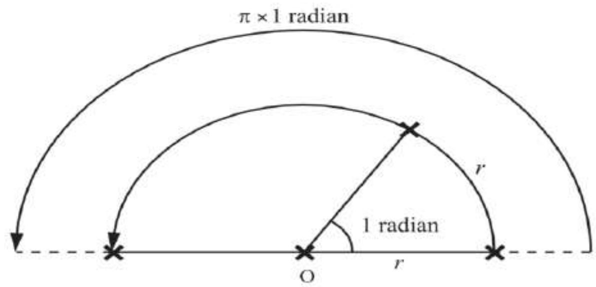
Exemple 5 .
Convertir en radian l'angle en degré suivant : 45°

■ *On a*

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi \times n}{180} \\ &= \frac{\pi \times 45}{180} \\ &= \frac{\pi \times 45}{4 \times 45} \\ &= \frac{\pi}{4} rad \end{aligned}$$

Remarque 6 .

Le radian est la mesure d'un angle au centre qui découpe, sur le cercle, un arc dont la longueur est égale au rayon.



Remarque 7 .

- *L'angle plat a pour mesure, en degré* 180 (180°), *en radian* π *(notation :* π *rad) ; en grade (notation :* $200gr$*).*

- *Pour un angle donné, soit* a *sa mesure en degré,* b *sa mesure en radian,* c *sa mesure en grade, on a alors la formule de conversion*

$$\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi} = \frac{c}{200}$$

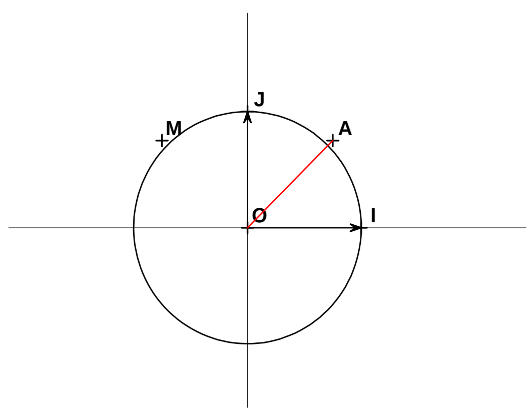
Dans la suite on utilise souvent la mesure en radian.

Abscisses curvilignes

Soit (C) un cercle trigonométrique lié au repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ et soit A un point de (C) tel que α est une mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOA}$ en radian et $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Imaginons un point M mobile sur le cercle (C) .

Le point M prend le départ en I.



1ère cas : M parcourt le cercle (C) dans le sens positif.

- Lorsque M coïncide avec A pour la première fois, il a parcouru un chemin de longueur α.

- La deuxième fois que M coincide avec A la mesure du trajet parcouru est $\alpha + 2\pi$ (un tour en plus de la longueurα) .
- La troisième fois $\alpha + 4\pi, ...,$ la $(k+1)$ fois $\alpha + 2k\pi$,$(k \in \mathbb{N})$.

2ème cas : M parcourt le cercle (C) dans le sens négatif.

- Lorsque M coïncide la première fois avec le point A, la mesure du chemin parcouru est $2\pi - \alpha$.
- La deuxième fois que M passe en A, il a parcouru un chemin de longueur $4\pi - \alpha$.
- La troisième fois $6\pi - \alpha, ...,$ la k' fois $2k'\pi - \alpha$,$(k' \in \mathbb{N})$.

Pour distinguer entre les cas précédents, le point M a parcouru un chemin de mesure $\alpha+2k\pi$ dans le premier cas et un chemin de mesure $-(-\alpha + 2k'\pi)$, c'est-à-dire $\alpha-2k'\pi$ dans le deuxième cas. Ceci signifie que dans tous les cas une mesure du chemin de parcourt de I à A est $\alpha + 2k''\pi$ tel que $k'' \in \mathbb{Z}$.

Définition 8 .

- *Soit (C) un cercle trigonométrique lié au repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ et soit A un point de (C) tel que α est une mesure de l'angle $\widehat{IOA}$ en radian. Tout nombre qui s'écrit sous la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, est appelé une abscisse curviligne du point M.*

- *Parmi les abscisses curvilignes du point M, il existe une seule abscisse curviligne appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$, appelée abscisse curviligne principale du point M.*

Exemple 9 .

Déterminer l'abscisse curviligne principale du point M qui admet α comme l'un de ses abscisses curvilignes dans le cas suivant :

$$\alpha = \frac{7\pi}{2}$$

Exemple 10 Méthode 1 .*Si α_0 est l'abscisse curviligne principale du point M, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$ c'est-à-dire $\alpha_0 = \alpha - 2k\pi$, cherchons la valeur de k telle que*

$$\alpha_0 = \frac{7\pi}{2} - 2k\pi \quad et \quad -\pi < \alpha_0 \leq \pi$$

on a

$$\begin{aligned} -\pi &< \frac{7\pi}{2} - 2k\pi \leq \pi \\ éq &: -1 < \frac{7}{2} - 2k \leq 1 \\ éq &: -1 - \frac{7}{2} < -2k \leq -\frac{7}{2} + 1 \\ éq &: -\frac{9}{2} < -2k \leq \frac{-5}{2} \\ éq &: \frac{5}{4} \leq k < \frac{9}{4} \\ éq &: 1,25 \leq k < 2,25 \end{aligned}$$

comme $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 2$, donc

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \alpha - 2k\pi \\ &= \frac{7\pi}{2} - 2k\pi \\ &= \frac{7\pi}{2} - 2 \times 2 \times \pi \\ &= \frac{-\pi}{2} \in]-\pi, \pi]\end{aligned}$$

d'où $\frac{-\pi}{2}$ est l'abscisse curviligne principale du point M.

Méthode 2 .

On a

$$\alpha = \frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi - \pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 4\pi$$

et comme $-\frac{\pi}{2} \in]-\pi, \pi]$, donc $\frac{-\pi}{2}$ est l'abscisse curviligne principale du point M.

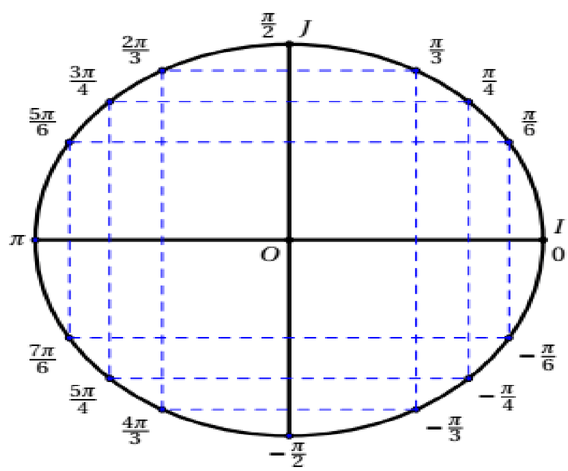
Exemple 11 .

Déterminer l'abscisse curviligne principale du point M qui admet α comme l'une de ses abscisses curvilignes dans les cas suivants :

$$\alpha = \frac{7\pi}{6}, \qquad \alpha = \frac{-15\pi}{12} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{67\pi}{4}$$

Remarque 12 .

On peut noter les angles remarquables sur le cercle trigonométrique. Il est important de visualiser l'emplacement des angles pour s'en faire une idée

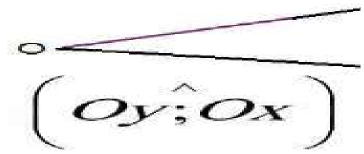


Angles orienté de deux vecteurs non nuls

Angle orienté de deux demi-droites

Définition 13 *On considére le plan (P) orienté, direct et O un point du plan (P).*
Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites.

- *Le couple* $([Ox), [Oy))$ *est appelé angle orienté des demi-droites* $[Ox)$ *et* $[Oy)$ *noté par* $\left(\widehat{Ox, Oy}\right)$.
- *Le couple* $([Oy), [Ox))$ *est appelé angle orienté des demi-droites* $[Oy)$ *et* $[Ox)$ *noté par* $\left(\widehat{Oy, Ox}\right)$.

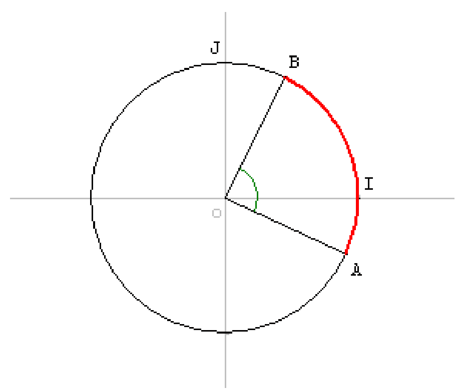


Mesures d'un angle orienté de deux vecteurs

Approche

- Mesures positives

  (C) est un cercle trigonométrique de centre O, A et B sont deux points de (C). Lorsqu'on fait tourner $\overrightarrow{OA}$ dans le sens direct pour l'amener sur $\overrightarrow{OB}$, le point A parcourt un arc de cercle de longueur α. On convient de dire que α est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.



  On peut faire un tour de plus, toujours dans le sens direct. Le point A parcourt un arc de cercle de longueur $\alpha + 2\pi$. On convient de dire que $\alpha + 2\pi$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.

  Si on effectue k tours de cercle, toujours dans le sens direct, le point A parcourt un trajet de longueur $\alpha + 2k\pi$, ce nombre est aussi une mesure de $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.

- Mesures négatives

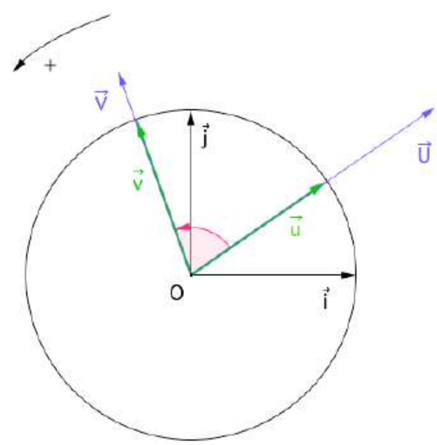
  Pour amener $\overrightarrow{OA}$ sur $\overrightarrow{OB}$ on peut aussi parcourir le cercle dans le sens indirect. Alors lorsque $\overrightarrow{OA}$ arrive sur $\overrightarrow{OB}$ pour la première fois, le point A parcourt un arc de cercle de longueur $2\pi - \alpha$. Pour indiquer que l'on parcourt le cercle dans le sens indirect sans l'écrire, on convient de compter ce trajet négativement et de dire que $-(2\pi - \alpha)$, c'est-à-dire $\alpha - 2\pi$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.

On peut faire un tour de plus, toujours dans le sens indirect que l'on compte négativement. On convient de dire que $-(2\pi - \alpha) - 2\pi$, c'est-à-dire $\alpha - 4\pi$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.

Si on effectue k' tours de cercle, toujours dans le sens indirect, que l'on compte négativement, on obtient pour mesure $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ le nombre réel $-(2\pi - \alpha) - 2k'\pi$ ce qui s'écrit encore $\alpha + 2(-k' - 1)\pi$.

Cas général

Définition 14 *Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls alors l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est l'angle des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ tels que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ sera notée par : $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$.*



Notation 15 *L'une des mesures de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ sera notée $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ et on écrit $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = \alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \equiv \alpha\,[2\pi]$. $\left(\text{se lit } \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \text{ est congru à } \alpha \text{ modulo } 2\pi\right)$*

Propriété 16 *Parmi toutes les mesures $\alpha + 2k\pi$, il en existe une et une seule dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Cette mesure est appelée la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$.*

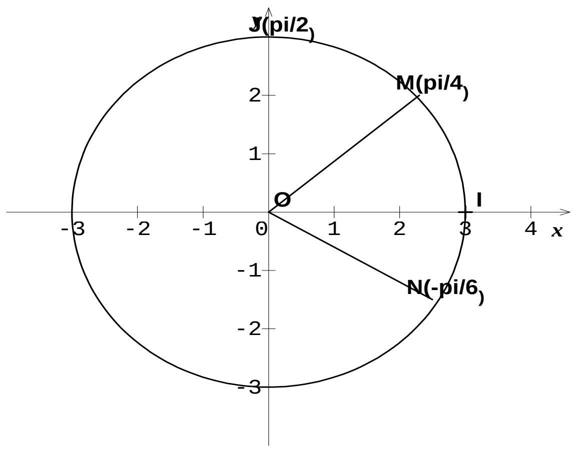
Remarque 17 *Si α est une mesure principle de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$. Tout nombre de la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi une mesure du même angle et on écrit :*

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = \alpha + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \quad \acute{e}q : \quad \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \equiv \alpha\,[2\pi]$$

Exemple 18 .

Déterminer une mesure principale de chacun des angles orientés :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right),\quad \left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right),\quad \left(\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OI}}\right)\quad et \quad \left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM}}\right)$$



♣ *On a* $\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$ *, donc* $\dfrac{\pi}{4}$ *est la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right)$.

♣ *On a* $\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ *, donc* $\dfrac{\pi}{2}$ *est la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)$.

♣ *On a* $\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ *, donc* $\dfrac{\pi}{2}$ *est la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)$.

♣ *On a* $\left(\overline{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OI}}\right)\equiv-\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ *, donc* $\dfrac{-\pi}{2}$ *est la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OI}}\right)$.

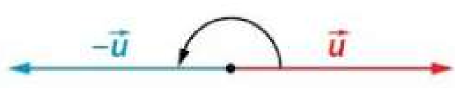
♣ *On a*

$$\begin{aligned}\left(\overline{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM}}\right) &\equiv \left(\overline{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OI}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\,[2\pi]\\ &\equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]\end{aligned}$$

donc $\dfrac{5\pi}{12}$ *est la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM}}\right)$.

Remarque 19 .

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ *non nul, on a :*



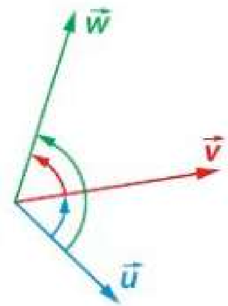
■ $\left(\overline{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}}\right)\equiv 0\,[2\pi]$

■ $\left(\overline{\overrightarrow{u},-\overrightarrow{u}}\right)\equiv \pi\,[2\pi]$

Propriétés des angles orientés

Propriété 20 *(Relation de chasles)*
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs on a :

$$\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}}\right) [2\pi]$$



Démonstration 21 *Admis*

Résultats 22 *Pour tous vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

1. $\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv -\left(\overline{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}\right) [2\pi]$
2. $\left(\overline{-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \pi\, [2\pi]$
3. $\left(\overline{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \pi\, [2\pi]$
4. $\left(\overline{-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) [2\pi]$

Démonstration 23 .
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

1. *On a d'après la relation de chasles*
$$\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}}\right) [2\pi]$$
or $\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}}\right) \equiv 0\, [2\pi]$, *donc*
$$\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv -\left(\overline{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}\right) [2\pi]$$
2. *On a d'après la relation de chasles*
$$\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right) [2\pi]$$
or $\left(\overline{\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{v}}\right) \equiv \pi\, [2\pi]$, *donc*
$$\left(\overline{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \pi\, [2\pi]$$

3. *De la même manière qu'en 2/*

4. *On a d'après la relation de chasles*

$$\begin{aligned}
\left(\overline{-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}\right) &\equiv \left(\overline{-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{v}}\right) [2\pi] \\
&\equiv \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \pi + \pi \, [2\pi] \\
&\equiv \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + 2\pi \, [2\pi] \\
&\equiv \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) [2\pi]
\end{aligned}$$

Exemple 24 .

Sachant que : $\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{9} [2\pi]$ *et* $\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{4} [2\pi]$

Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants : $\left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}}\right)$ *et* $\left(\widehat{-\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}}\right)$.

■ *On a d'après la relation de chasles*

$$\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}}\right) [2\pi]$$

donc

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}}\right) &\equiv \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}}\right) - \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) [2\pi] \\
&\equiv \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{9} [2\pi] \\
&\equiv \frac{-5\pi}{36} [2\pi]
\end{aligned}$$

d'où $\dfrac{-5\pi}{36}$ *est la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}}\right)$.

■ *On a*

$$\begin{aligned}
\left(\overline{-\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}}\right) &\equiv \left(\overline{\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}}\right) + \pi \, [2\pi] \\
&\equiv \frac{5\pi}{36} + \pi \, [2\pi] \\
&\equiv \frac{41\pi}{36} [2\pi]
\end{aligned}$$

comme $\dfrac{41\pi}{36} = \dfrac{72\pi - 31\pi}{36} = 2\pi - \dfrac{31\pi}{36}$ *et puisque* $-\dfrac{31\pi}{36} \in]-\pi, \pi]$ *donc* $\dfrac{-31\pi}{36}$ *est la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\widehat{-\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}}\right)$.

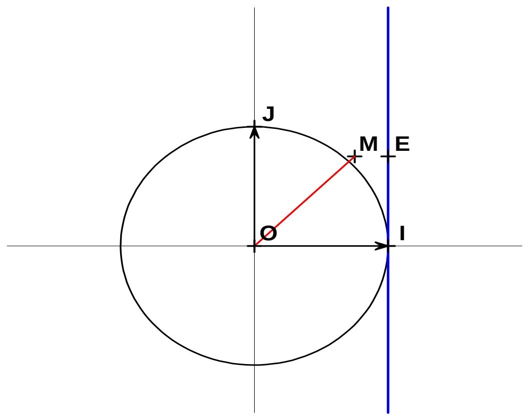
Les lignes trigonométriques

cosinus, sinus et tangente d'angle

Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ le repère orthonormé associé à (C) en I.

E le point projeté orthogonal de J sur (Δ).

Sur la droite (Δ), on choisit le repère (I, E) et soit x un réel, M un point de (C) ayant x pour abscisse curviligne.



Définition 25 .

- *L'abscisse du point M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ s'appelle cosinus de x et on le note* $\cos x$.
- *L'ordonnée du point M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ s'appelle sinus de x et on le note* $\sin x$.
- *Si $M \neq J$ et $M \neq J'$, alors le droite (OM) coupe la droite (Δ) au point T. L'abscisse de T dans le repère (I, E) est appelée la tangente de x qu'on note* $\tan x$.

Remarque 26 .

Pour $M = J$ ou $M = J'$, la droite (Δ) est parallèle à (OM) et donc le point T n'existe pas , c'est-à-dire que la tangente n'existe pas pour les points $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ceci signifie que $\tan x$ existe si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 27 .

Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif k :

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
2. $-1 \leq \cos x \leq 1$ *et* $-1 \leq \sin x \leq 1$
3. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ *et* $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

Démonstration 28 .

Soit M le point image du réel x.

1. Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *alors d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMH, où H est le point de $[OI]$ tel que $(MH) \perp (OI)$, on a*

$$OM^2 = OH^2 + HM^2$$

donc $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$, *d'où*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

On admet le résultat pour les autres valeurs de x.

2. *On a* : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ *par suite* $\cos^2 = 1 - \sin^2 x \leq 1$ *alors* $\cos^2 \leq 1$ *d'où* $-1 \leq \cos x \leq 1$.

   De la même manière on montre que : $-1 \leq \sin x \leq 1$.

3. *Soit M' le point image du nombre réel $x + 2k\pi$. Les points M et M' sont confondus, ils ont donc même abscisse et même ordonnée.*

Exemple 29 .

Calculer $\cos x$ *si* $\sin x = \frac{-4}{5}$ *et* $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.
On a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ *donc* : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, *c'est-à-dire* :

$$|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

comme $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, *donc* $\cos x < 0$, *c'est-à-dire* : $|\cos x| = -\cos x$, *d'où*

$$\begin{aligned} \cos x &= -\sqrt{1 - \sin^2 x} \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{-4}{5}\right)^2} \\ &= -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} \\ &= \frac{-3}{5} \end{aligned}$$

Propriété 30 .

Pour tout réel x différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \textit{et} \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Démonstration 31 .

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$, *on a*

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Exemple 32 .

Calculer $\cos x$ *si* $\tan x = \frac{1}{3}$ *et* $-\pi < x < \frac{-\pi}{2}$.

Soit $x \in \left]-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[$. *On a* $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ *par suite*

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

donc

$$|\cos x| = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 x}}$$

comme $-\pi < x < \frac{-\pi}{2}$, *donc* $\cos x < 0$, *c'est-à-dire* : $|\cos x| = -\cos x$, *d'où*

$$\begin{aligned} \cos x &= -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 x}} \\ &= -\sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{-3\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

Remarque 33 .

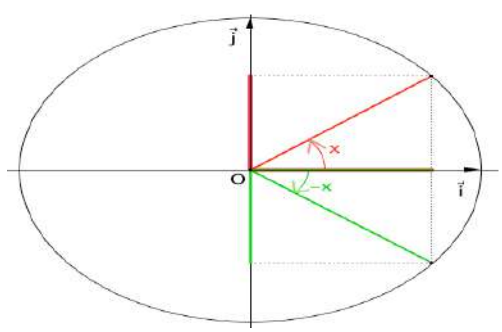
Pour tout réel x *différent de* $\frac{\pi}{2} + k\pi$ *tel que* $k \in \mathbb{Z}$, *on a* :

$$\tan(x + k\pi) = \tan x$$

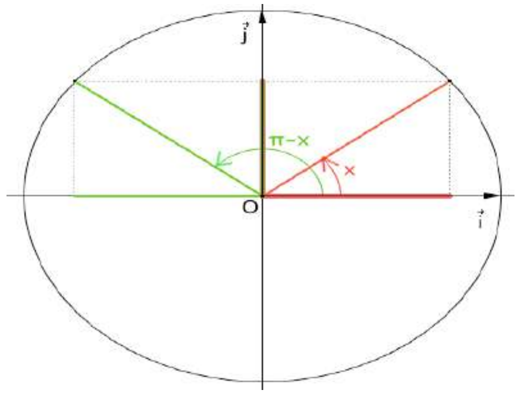
cosinus, sinus et tangente d'angle associés

Propriété 34 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

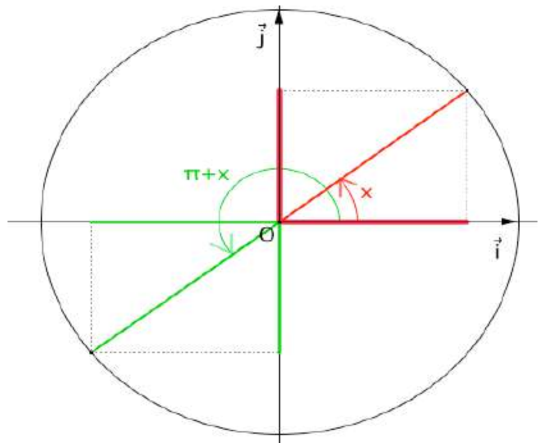
1. $\cos(-x) = \cos x$ *et* $\sin(-x) = -\sin x$



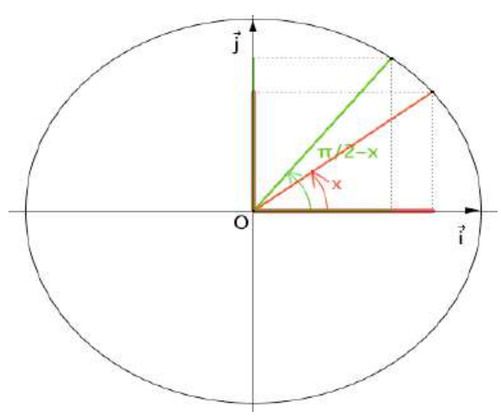
2. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ *et* $\sin(\pi - x) = \sin x$



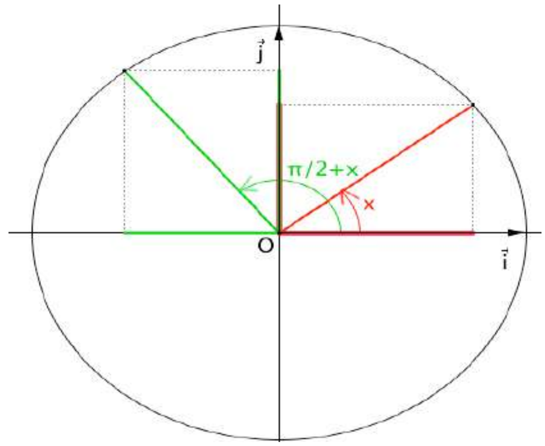
3. $\cos(\pi + x) = -\cos x$ *et* $\sin(\pi + x) = -\sin x$



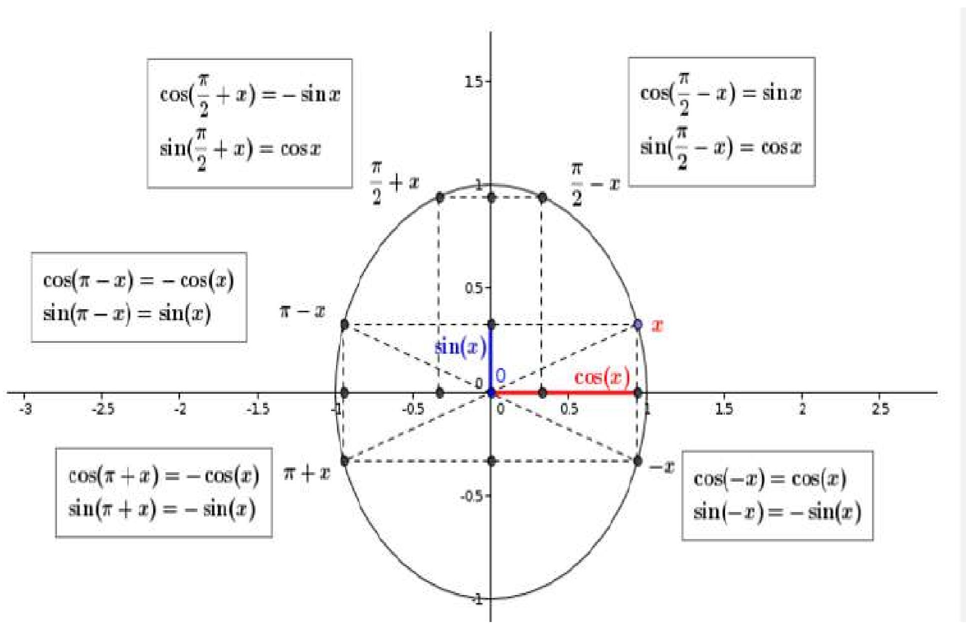
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$



5. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$



Remarque 35 .
Pour tout réel x



Propriété 36 *Soit x un réel.*

■ *Si x est distinct des réels $\frac{\pi}{2}+k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\begin{cases} \tan(\pi - x) = -\tan x \\ \tan(\pi + x) = \tan x \end{cases} \quad et \quad \tan(-x) = -\tan x$$

■ *Si en plus x est distinct des réels $k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, alors :*

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan x} \quad et \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\frac{1}{\tan x}$$

Démonstration 37 .

■ *Soit* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$, *on a*

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = \tan x$$

et

$$\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin x}{-\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

et

$$\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

De la même manière pour les autres formules.

Exemple 38 *Soit x un réel, simplifier les expressions suivantes* :

$$\begin{aligned}
A &= \cos(\pi + x) - \cos(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
B &= \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) \\
C &= \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos(x - 3\pi)
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
A &= \cos(\pi + x) - \cos(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&= -\cos x - (-\cos x) + \sin x \\
&= -\cos x + \cos x + \sin x \\
&= \sin x
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
B &= \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi + 4\pi}{2} + x\right) + \sin\left(x - \frac{8\pi - \pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x + 2\pi\right) + \sin\left(x - 4\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\
&= -\sin x + \cos x
\end{aligned}$$

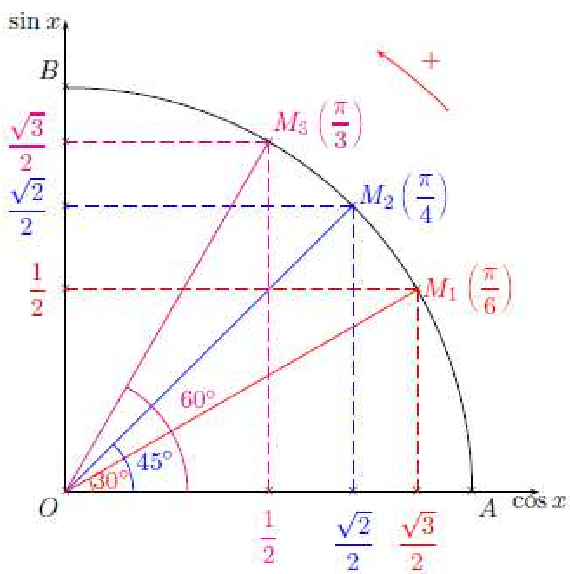
■

$$
\begin{aligned}
C &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos(x-3\pi)\\
&= \cos\left(\frac{4\pi-\pi}{2}+x\right)+\cos(x-2\pi-\pi)\\
&= \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(x-\pi)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)\\
&= \sin x-\cos x
\end{aligned}
$$

Valeurs remarquables

Il est utile de connaître ou de savoir retrouver rapidement les valeurs des sinus et cosinus des angles suivants :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n'existe pas



Exemple 39 .

Calculer : $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{53\pi}{6}\right)$ *et* $\tan\left(\frac{19\pi}{6}\right)$.

■

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{4\pi-\pi}{4}\right)\\ &= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{53\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{54\pi-\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(\frac{54\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(9\pi-\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(\pi+8\pi-\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{19\pi}{6}\right) &= \tan\left(\frac{18\pi+\pi}{6}\right)\\ &= \tan\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com