L'odre dans l'ensemble des réels

L'odre et les opérations dans l'ensemble des réels

Définition

Définition 1 *Soient a et b deux réels.*

- *On dit que a est supérieur ou égal à b et on note $a \geq b$ si $a - b$ est positif.*
- *On dit que a est inférieur ou égal à b et on note $a \leq b$ si $a - b$ est négatif.*

Remarque 2 *Comparer a et b revient à étudier le signe de leur différence $a - b$.*

Exemple 3 *Comparer les deux nombres : $a = \sqrt{6}$ et $b = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$.*

- *On étudie le signe de : $a - b$.*

  On a

$$\begin{aligned} a - b &= \sqrt{6} - \left(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1\right) \\ &= \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 \\ &= \sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 \\ &= \sqrt{3}\left(\sqrt{2} - 1\right) - \left(\sqrt{2} - 1\right) \\ &= \left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right) \end{aligned}$$

  Comme $\sqrt{2} - 1 > 0$ et $\sqrt{3} - 1 > 0$, alors $\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right) > 0$, donc $a - b > 0$, c'est-à-dire $a > b$.

  D'où

$$\sqrt{6} > \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$$

Propriétés de l'ordre et les opérations

Propriété 4 *Soient a, b, c et d des éléments de $\mathbb{R}$.*

- *Si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors : $a \leq c$.*
- *$a \leq b$ équivaut à $a + c \leq b + c$.*
- *Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.*
- *Si $c > 0$ alors : $a \leq b$ équivaut à $ac \leq bc$.*

- *Si* $c < 0$ *alors :* $a \leq b$ *équivaut à* $ac \geq bc$.
- *Si* $0 \leq a \leq b$ *et* $0 \leq c \leq d$ *alors* $0 \leq ac \leq bd$.
- *Si* a *et* b *non nuls et de même signe alors :* $a \leq b$ *équivaut à* $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$.
- *Si* a *et* b *sont positifs alors :* $a \leq b$ *équivaut à* $a^2 \leq b^2$.
- *Si* a *et* b *sont positifs alors :* $a \leq b$ *équivaut à* $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Exemple 5 *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On pose :* $a = \sqrt{4n^2+1}$ *et* $b = 2n+1$. *Comparer* a *et* b.

- *Comme* $a > 0$ *et* $b > 0$, *alors pour comparer* a *et* b, *il suffit de comparer* a^2 *et* b^2.

  On a :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= \left(\sqrt{4n^2+1}\right)^2 - (2n+1)^2 \\ &= 4n^2+1-\left(4n^2+4n+1\right) \\ &= 4n^2+1-4n^2-4n-1 \\ &= -4n \end{aligned}$$

  et comme $-4n \leq 0$ *donc* $a^2 - b^2 \leq 0$ *c'est-à-dire* $a^2 \leq b^2$, *d'où :* $a \leq b$.
- *Si* $n = 0$ *alors* $a = b = 1$.
- *Si* $n \neq 0$ *alors* $a < b$.

Exemple 6 *Soit* x *et* y *deux réels tels que :* $x < y < 3$.

1. *Montrer que :* $x + y - 6 < 0$
2. *Comparer les nombres :* $a = x^2 - 6x + 1$ *et* $b = y^2 - 6y + 1$

   - *Montrons que :* $x + y - 6 < 0$.
     On a : $x < y < 3$, *c'est équivaut à :* $x < y$ *et* $y < 3$ *alors* $x < 3$ *et* $y < 3$ *donc* $x + y < 6$. *D'où :* $x + y - 6 < 0$.
   - *On compare les nombres* a *et* b.
     On a

$$\begin{aligned} a - b &= \left(x^2-6x+1\right) - \left(y^2-6y+1\right) \\ &= x^2-6x+1-y^2+6y-1 \\ &= x^2-y^2-6x+6y \\ &= (x-y)(x+y)-6(x-y) \\ &= (x-y)\left[(x+y)-6\right] \\ &= (x-y)(x+y-6) \end{aligned}$$

     comme $x < y < 3$ *alors,* $x < y$ *c'est-à-dire* $x - y < 0$.
     On a $x + y - 6 < 0$ *donc* $(x-y)(x+y-6) > 0$.*D'où* $a - b > 0$ *c'est-à-dire :* $a > b$.

Exercice d'application 7 .

a, b et c trois réels.

1. *Montrer que :* $a^2 + b^2 \geq 2ab$

   a) *Déduire que :* $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

   b) *Déduire que :* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a+b)(c+d)$

Encadrement

Définition 8 *Soient a, b et x trois nombres réels.*
On dit que a et b encadrent x lorsque

$$a \leq x \leq b$$

Cette double inégalité est appelée encadrement de x d'amplitude $b - a$.

Exercice d'application 9 .

On considère les nombres réels x, y et z tels que :

$$2 \leq x \leq 4\ ,\quad -3 \leq y \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{-3}{2} \leq z \leq \frac{-1}{2}$$

Trouver un encadrement des nombres suivants : $x - y$, $x \times y$ *et* $x^2 + y^2 + z^2$

- *On encadre :* $x - y$

  On a : $x - y = x + (-y)$.

  comme $-3 \leq y \leq 1$, *alors* $-1 \leq -y \leq 3$, *par suite :* $2 - 1 \leq x + (-y) \leq 4 + 3$ *donc*

$$1 \leq x - y \leq 7$$

- *On encadre :* $x \times y$

  Comme $-3 \leq y \leq 1$ *ceci signifie que y peut prendre des valeurs positives ou négatives* ($-3 \leq y \leq 0$ *ou* $0 \leq y \leq 1$), *donc on ne peut pas encadrer directement $x \times y$. C'est pour cela qu'on va distinguer deux cas.*

  1er cas . *Si* $0 \leq y \leq 1$

  alors : $0 \times 2 \leq x \times y \leq 1 \times 4$, *donc*

$$0 \leq x \times y \leq 4$$

  2ème cas . *Si* $-3 \leq y \leq 0$ *alors :* $0 \leq -y \leq 3$.

  Or : $2 \leq x \leq 4$, *donc :* $0 \times 2 \leq x \times (-y) \leq 3 \times 4$, *c'est-à-dire :* $0 \leq -xy \leq 12$, *d'où :*

$$-12 \leq xy \leq 0.$$

Finalement :

$$-12 \leq xy \leq 4$$

- *On encadre :* $x^2+y^2+z^2$

  On a : $2 \leq x \leq 4$ *alors :* $4 \leq x^2 \leq 16 \quad (1)$

  on a : $\dfrac{-3}{2} \leq z \leq \dfrac{-1}{2}$ *alors* $\dfrac{1}{4} \leq z^2 \leq \dfrac{9}{4} \quad (2)$

  on a $-3 \leq y \leq 1$ *alors :* $-3 \leq y \leq 0$ *ou* $0 \leq y \leq 1$

  par suite : $0 \leq y^2 \leq 9$ *ou* $0 \leq y^2 \leq 1$ *d'où :* $0 \leq y^2 \leq 9 \quad (3)$

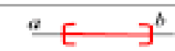
  En ajoutant membre à membre des doubles inégalités (1), (2) *et* (3), *on obtient :*

$$\frac{17}{4} \leq x^2+y^2+z^2 \leq \frac{109}{4}$$

Intervalles de $\mathbb{R}$

Intervalles bornés.

Le tableau ci-dessous résume les quatre types d'intervalles bornés.

L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels x tels que :	Représentation (en rouge) :
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	

Exemple 10 .

1. $-3 \leq x \leq 7$ *équivaut à :* $x \in [-3;7]$
2. $2 \prec x \leq 6$ *équivaut à :* $x \in]2;6]$
3. $0 \leq x \prec 6$ *équivaut à :* $x \in [0;6[$

Exemple 11 *Ecrire les ensembles suivants sous la forme des intervalles.*

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} /\ 1 \leq -3x+4 \leq 2\} \\ B &= \left\{x \in \mathbb{R} /\ -1 < \frac{2x-1}{4} < 3\right\} \end{aligned}$$

♣ *On a*

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}/\ 1 \leq -3x + 4 \leq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\ -3 \leq -3x \leq -2\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ \frac{3}{2} \leq x \leq 1\right\} \\ &= \left[\frac{3}{2}, 1\right] \end{aligned}$$

donc

$$A = \left[\frac{3}{2}, 1\right]$$

♣ *On a*

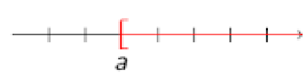
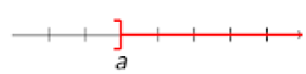
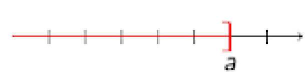
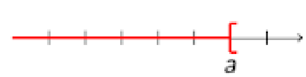
$$\begin{aligned} B &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ -1 < \frac{2x-1}{4} < 3\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\ -4 < 2x - 1 < 12\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\ -3 < 2x < 13\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ \frac{-3}{2} < x < \frac{13}{2}\right\} \\ &= \left]\frac{-3}{2}, \frac{13}{2}\right[\end{aligned}$$

donc

$$B = \left]\frac{-3}{2}, \frac{13}{2}\right[$$

Intervalles non bornés

on a le tableau suivant

Intervalle	Ensemble des réels x tels que	Représentation graphique
$[a, +\infty[$	$x \geq a$	
$]a, +\infty[$	$x > a$	
$]-\infty; a]$	$x \leq a$	
$]-\infty, a[$	$x < a$	

Exemple 12 .

1. *$x \geq 3$ équivaut à : $x \in [3;+\infty[$*

2. *$x < -5$ équivaut à : $x \in]-\infty;-5[$*

Exemple 13 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :*

$$(I_2) : 3x+1 \geq 6 \ , \qquad (I_2) : -5x+4 > 19 \quad , \qquad (I_3) : \frac{x}{2}+1 \leq 2x$$

Remarque 14 .

1. *$+\infty$ se lit " plus l'infini "*

2. *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.*

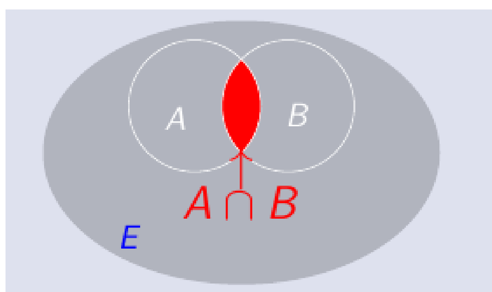
3. *$\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$, $\mathbb{R}^- =]-\infty,0]$, $\mathbb{R}^*_+ =]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^*_- =]-\infty,0[$.*

4. *$-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres.*

5. *L'ensemble vide ne contient aucun élément, il se note $\varnothing$.*

Intersection d'intervalles.

Définition 15 *Soient A et B deux intervalles de $\mathbb{R}$. Les réels qui sont à la fois dans l'intervalle A et dans l'intervalle B sont dans l'intersection des intervalles A et B. Elle se note $A \cap B$. ($\cap$: se lit inter)*



Exemple 16 .

Soit $A = \{1,3,5,7,9\}$ et $B = \{2,3,5,7\}$ alors $A \cap B = \{3,5,7\}$.

Exemple 17 *Déterminons $I \cap J$ avec $I =]-3;2]$ et $J = [0;4]$.*

- *Pour visualiser cette intersection, on peut représenter les intervalles I et J sur un même axe gradué.*

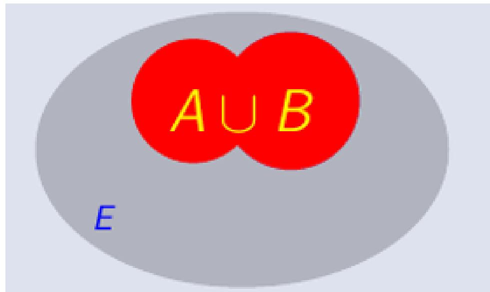
  L'intersection des deux intervalles est la zone de l'axe gradué où les deux couleurs se superposent. Ainsi
  $$I \cap J = [0;2].$$

- *Déterminons $I \cap J$ avec $I = [-3;-1]$ et $J = [1;4]$.*
  $$I \cap J = \varnothing$$

  car les ensembles I et J n'ont pas de zone en commun.

Union d'intervalles

Définition 18 *L'union de deux intervalles de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels appartenant au premier ou au second intervalle. L'union (ou réunion) de A et de B se note $A \cup B$.* ($\cup$: *se lit union*)



Exemple 19 *.*
Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$ alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Exemple 20 *.*

- *Déterminons $I \cup J$ avec $I =]-3; 2]$ et $J = [0; 4]$.*

Les nombres de l'union sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux intervalles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit par l'intervalle I soit par l'intervalle J. Ainsi

$$I \cup J =]-3; 4].$$

- *Déterminons $I \cup J$ avec $I = [-3; -1]$ et $J = [1; 4]$.*

$$I \cup J = [-3; -1] \cup [1; 4]$$

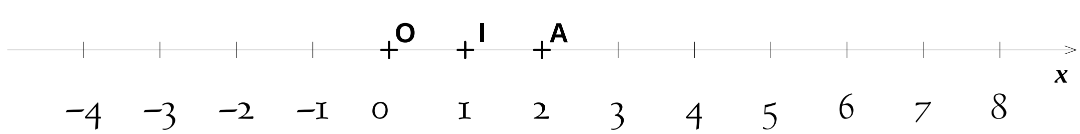
Exemple 21 *Déterminer :*

- $[-3; 4] \cap [2, 9]$
- $]-\infty; 5] \cup]3; +\infty[$
- $[-11; -8] \cap [-7; -1]$
- $]-1; \frac{-2}{3}[\cup [\frac{2}{3}; 1[$

Valeur Absolue et distance

Valeur Absolue

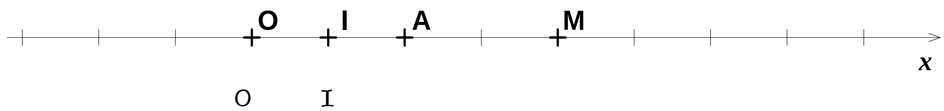
Claim 22 *.*
La droite graduée (Δ) liée à un repère (O, I) tel que : $OI = 1cm$. On considère le point A d'abscisse 2.



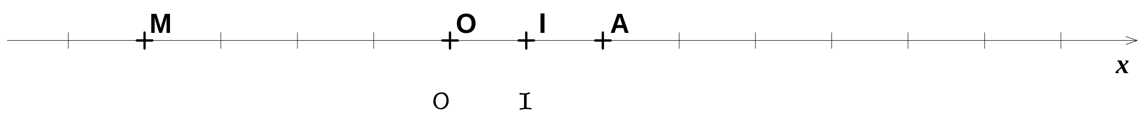
1. *Calculer la distance OA.*

2. *Pour calculer la distance AM il faut savoir l'emplacement du point M par rapport au point A, on distingue 3 cas :*

1er cas



2éme cas



3éme cas

Ecrire dans chaque cas la distance AM au fonction de x.

Résumer

On peut résumer l'expression de la distance AM dans les trois cas par l'écriture suivante : $AM = |x - 2|$. Se lit : la distance AM égale la valeur absolue du nombre $x - 2$.

On a

$$\begin{cases} |x-2| = x-2 \text{ si } x > 2 \\ \\ |x-2| = 2-x \text{ si } x < 2 \\ \\ |x-2| = 0 \text{ si } x = 2 \end{cases}$$

Définition 23 *Soit x un réel et M le point d'abscisse x de la droite des réels d'origine O.* ***La valeur absolue*** *de x est la distance OM; on note $|x| = OM$.*

Et par suite :

$$|x| = \begin{cases} x \quad si\ x \geq 0 \\ \\ -x \ si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Exemple 24 .

1. $|3| = 3$, $|-4| = 4$ *et* $\left|-\dfrac{3}{5}\right| = \dfrac{3}{5}$.

2. $\left|\underbrace{2-\sqrt{3}}_{nombre\ positif}\right| = \underbrace{2-\sqrt{3}}_{même\ nombre}$.

3. $\left|\underbrace{\sqrt{5}-3}_{nombre\ négatif}\right| = -\left(\sqrt{5}-3\right) = \underbrace{3-\sqrt{5}}_{opposé}$.

4. $|x-1| = \begin{cases} x-1 & si\ \ x \geq 1 \\ \\ -x+1 & si\ \ x \leq 1 \end{cases}$

Exemple 25 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E) : |2x-7| = 5$.

Par définition de valeur absolue $|2x-7| = \begin{cases} 2x-7 & si\ \ 2x-7 \geq 0 \\ \\ -(2x-7) & si\ \ 2x-7 \leq 0 \end{cases}$

1er cas . Si : $2x-7 \geq 0$

$$\begin{aligned} (E)\ \ éq\ &:\ \ 2x-7=5 \\ éq\ &:\ 2x=5+7 \\ éq\ &:\ 2x=12 \\ éq\ &:\ x=\frac{12}{2} \\ éq\ &:\ x=6 \end{aligned}$$

et comme $2\times6-7=5\geq0$ *donc*

$$S_1 = \{6\}$$

2ème cas . Si $2x-7 \leq 0$

$$\begin{aligned} (E)\ \ éq\ &:\ \ -(2x-7)=5 \\ éq\ &:\ -2x+7=5 \\ éq\ &:\ -2x=5-7 \\ éq\ &:\ -2x=-2 \\ éq\ &:\ x=1 \end{aligned}$$

et comme $2\times1-7=-5\leq0$ *donc*

$$S_2 = \{1\}$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est*

$$S = S_1 \cup S_2 = \{1, 6\}$$

Propriété 26 .

1. *La valeur absolue d'un nombre est toujours positive* : $|x| \geq 0$.
2. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *on a* $\sqrt{x^2} = |x|$
3. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$ *on a* $-|x| \leq x \leq |x|$
4. *Un nombre est son opposé ont la même valeur absolue* : $|x| = |-x|$.

Les propriétés de la valeur absolue

Propriété 27 *Soit x et y deux réels.*

1. $|x|^2 = |x^2| = x^2$
2. $|x| \geq 0$
3. $|x - y| = |y - x|$
4. $|x \times y| = |x| \times |y|$
5. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad , (y \neq 0)$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$
7. $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$
8. $|x| = a$ *si et seulement si* $\left\{\begin{array}{c} x = a \\ \textit{ou} \\ x = -a \end{array}\right.$ *avec* $a \geq 0$.
9. $|x| = |y|$ *si et seulement si* $\left\{\begin{array}{c} x = y \\ \textit{ou} \\ x = -y \end{array}\right.$

Démonstration 28 .

1. *Montrons que :* $|x^2| = |x|^2 = x^2$
   - Si : $x \geq 0$, *alors* $|x^2| = |x \times x| = |x| \times |x| = x \times x = x^2$.
   - Si : $x \leq 0$, *alors* $|x^2| = |x \times x| = |x| \times |x| = (-x) \times (-x) = x^2$.

   On conclut que pour tout x *dans* $\mathbb{R}$. *On a*
   $$\left|x^2\right| = x^2$$
2. *Découle de la définition.*
3. *Montrons que :* $|x - y| = |y - x|$

   1ér cas. Si : $x - y \geq 0$, *alors* $|x - y| = x - y$ *et comme* $-(x - y) \leq 0$, *c'est-à-dire* $y - x \leq 0$ *donc* $|y - x| = -(y - x) = x - y$. *D'où*
   $$|x - y| = |y - x|$$
   2éme cas. Si : $x - y \leq 0$, *alors* $|x - y| = -(x - y) = y - x$ *et comme* $-(x - y) \geq 0$, *c'est-à-dire* $y - x \geq 0$ *donc* $|y - x| = y - x$. *D'où*
   $$|x - y| = |y - x|$$
   Donc pour tout x, y *dans* $\mathbb{R}$ *on a*
   $$|x - y| = |y - x|$$

4. *Montrons que :* $|x \times y| = |x| \times |y|$

- Si $x \geq 0$ *et* $y \geq 0$, *alors* $|x| = x$ *et* $|y| = y$, *donc* $|x| \times |y| = x \times y$ *et comme* $|x \times y| = x \times y$. *D'où*
$$|x \times y| = |x| \times |y|$$
- Si $x \geq 0$ *et* $y \leq 0$, *alors* $|x| = x$ *et* $|y| = -y$, *donc* $|x| \times |y| = -x \times y$ *et comme* $|x \times y| = -x \times y$. *D'où*
$$|x \times y| = |x| \times |y|$$
- Si $x \leq 0$ *et* $y \leq 0$, *alors* $|x| = -x$ *et* $|y| = -y$, *donc* $|x| \times |y| = x \times y$ *et comme* $|x \times y| = x \times y$ *car le produit* $x \times y$ *est positif. D'où,*
$$|x \times y| = |x| \times |y|$$

On conclut que pour tout x, y *dans* $\mathbb{R}$ *on a*
$$|x \times y| = |x| \times |y|$$

5. *Même démonstration que* 4.

6. *Montrons que :* $|x + y| \leq |x| + |y|$

On a
$$\begin{array}{rcl} |x+y|^2 & = & (x+y)^2 \\ & = & x^2 + 2xy + y^2 \\ & = & |x|^2 + 2xy + |y|^2 \\ & \leq & |x|^2 + |2xy| + |y|^2 \quad \text{car} \quad xy \leq |xy|) \\ & \leq & (|x| + |y|)^2 \end{array}$$

On conclut que
$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

Donc, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ *on a*
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

7. *Montrons que :* $|x| = a$ *si et seulement si* $\left\{\begin{array}{c} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{array}\right.$

- Si : $x \geq 0$ *alors* $|x| = x$, *donc*
$$|x| = a \quad \text{équivaux à} : x = a$$
- Si : $x \leq 0$ *alors* $|x| = -x$, *donc*
$$|x| = a \quad \text{équivaux à} : x = -a$$

On conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = a \text{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{c} x = a \\ ou \\ x = -a \end{array} \right.$$

8. *Montrons que :* $|x| = |y|$ *si et seulement si* $\left\{ \begin{array}{c} x = y \\ ou \\ x = -y \end{array} \right.$.

- Si $x \geq 0$ *et* $y \geq 0$, *alors* $|x| = x$ *et* $|y| = y$, *donc*

$$|x| = |y| \text{ équivaux à : } x = y.$$

- Si $x \geq 0$ *et* $y \leq 0$, *alors* $|x| = x$ *et* $|y| = -y$, *donc*

$$|x| = |y| \quad \text{équivaux à : } x = -y.$$

- Si $x \leq 0$ *et* $y \leq 0$, *alors* $|x| = -x$ *et* $|y| = -y$, *donc*

$$|x| = |y| \text{ équivaux à : } x = y.$$

On conclut que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x| = |y| \text{ si et seulement si } \left\{ \begin{array}{c} x = y \\ ou \\ x = -y \end{array} \right.$$

Exemple 29

- *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $|x - 3| = 4$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{array}{rcl} |x-3| & = & 4 \text{ éq : } x - 3 = 4 \quad ou\ x - 3 = -4 \\ \text{éq} & : & x = 3 + 4 \quad ou\ x = 3 - 4 \\ \text{éq} & : & x = 7 \ ou\ x = -1 \end{array}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$S = \{-1, 7\}$$

Exemple 30 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

$(E_1) : |x - 2| = 0$, $(E_2) : |3x + 1| = 4$, $(E_3) : |2x - 5| = -1$ *et* $(E_4) :$ $|3x - 1| = |x - 1|$

- *Soit* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$|x - 2| = 0 \text{ éq : } x - 2 = 0 \text{ éq : } x = 2$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) *est :*

$$S = \{2\}$$

- *Soit* $x \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{aligned}
(E_2) \quad éq \quad &: \quad 3x+1=4 \ ou \ \ 3x+1=-4 \\
éq \quad &: \quad 3x=3 \ ou \ 3x=-5 \\
éq \quad &: \quad x=1 \ ou \ x=\frac{-5}{3}
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) *est :*

$$S=\left\{\frac{-5}{3},1\right\}$$

- *Comme* $-1<0$ *et* $|2x-5|\geq 0$*, ceci signifie que l'équation* (E_3) *n'admet aucune solution dans* $\mathbb{R}$*. Donc :*

$$S=\varnothing$$

- *Soit* $x \in \mathbb{R}$*, on a*

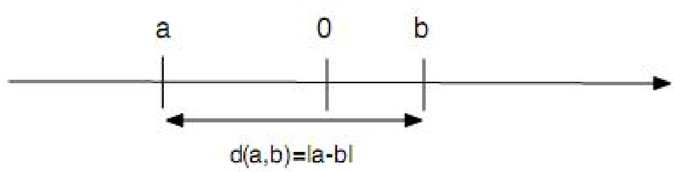
$$\begin{aligned}
(E_4) \quad éq \quad &: \quad 3x-1=x-1 \quad ou \quad 3x-1=-(x-1) \\
éq \quad &: \quad 3x-x=1-1 \quad ou \quad 3x-1=-x+1 \\
éq \quad &: \quad 2x=0 \ ou \ \ 3x+x=1+1 \\
éq \quad &: \quad x=0 \ \ ou \ 4x=2 \\
éq \quad &: \quad x=0 \ ou \ x=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) *est :*

$$S=\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$$

Distance entre deux réels

Définition 31 *Soient* a *et* b *deux réels.* A *et* B *deux points de la droite réels respectivement d'abscisses* a *et* b*. La distance entre* a *et* b *est la valeur absolue de leur différence :* $AB=|a-b|=|b-a|$ *.*



Valeur absolue et intervalle

Propriété 32 *Soient* $x \in \mathbb{R}$ *et* $a \in \left]0,+\infty\right[$ *.*

1. $|x| \leq a$ *si et seulement si* $-a \leq x \leq a$. (*c'est-à-dire :* $x \in [-a; a]$).

2. $|x| \geq a$ *si et seulement si* $x \geq a$ *ou* $x \leq -a$. (*c'est-à-dire :* $x \in]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$).

Exemple 33 *Trouver les réels x satisfaisant à la condition indiquée :*

♣ $|x+4| \leq 1$

♣ $\left|x + \frac{1}{2}\right| \geq \frac{2}{3}$

♣ $\frac{1}{2} \leq \left|x - \frac{1}{2}\right| < 2$

• *Soit* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
|x-2| &\leq \frac{3}{4} \text{ éq : } \frac{-3}{4} \leq x - 2 \leq \frac{3}{4} \\
\text{éq} &: \frac{-3}{4} + 2 \leq x \leq \frac{3}{4} + 2 \\
\text{éq} &: \frac{5}{4} \leq x \leq \frac{11}{4} \\
\text{éq} &: x \in \left[\frac{5}{4}; \frac{11}{4}\right]
\end{aligned}$$

• *Soit* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
|2x-1| &\geq 3 \text{ éq : } 2x - 1 \geq 3 \text{ ou } 2x - 1 \leq -3 \\
\text{éq} &: 2x \geq 4 \text{ ou } 2x \leq -2 \\
\text{éq} &: x \geq \frac{4}{2} \text{ ou } x \leq \frac{-2}{2} \\
\text{éq} &: x \geq 2 \text{ ou } x \leq -1 \\
\text{éq} &: x \in [2; +\infty[\text{ ou } x \in]-\infty; -1] \\
\text{éq} &: x \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[
\end{aligned}$$

• *Soit* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\leq \left|x - \frac{1}{2}\right| \prec 2 \text{ éq : } \frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \prec 2 \text{ ou } \frac{1}{2} \leq -\left(x - \frac{1}{2}\right) \prec 2 \\
\text{éq} &: \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq x \prec 2 + \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{1}{2} \leq -x + \frac{1}{2} \prec 2 \\
\text{éq} &: 1 \leq x \prec \frac{5}{2} \text{ ou } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq -x \prec 2 - \frac{1}{2} \\
\text{éq} &: 1 \leq x \prec \frac{5}{2} \text{ ou } 0 \leq -x \prec \frac{3}{2} \\
\text{éq} &: 1 \leq x \prec \frac{5}{2} \text{ ou } \frac{-3}{2} \prec x \leq 0 \\
\text{éq} &: x \in \left[1; \frac{5}{2}\right[\text{ ou } x \in \left]\frac{-3}{2}; 0\right] \\
\text{éq} &: x \in \left]\frac{-3}{2}; 0\right] \cup \left[1; \frac{5}{2}\right[
\end{aligned}$$

Les approximations – Les approximations décimales

Les approximations

Définition 34 .

Soit x *un réel tel que* $a \leq x \leq b$ *ou* $a \prec x \leq b$ *ou* $a \leq x \prec b$ *ou* $a < x < b$.

- *Le réel* a *est appelé une valeur approchée par défaut de* x *à* $b - a$ *près.*
- *Le réel* b *est appelé une valeur approchée par excès de* x *à* $b - a$ *près.*

Exemple 35 .

On considère l'encadrement suivant $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$ *donc* :

- *Le nombre* $2,645$ *est une valeur approchée par défaut de* $\sqrt{7}$ *à* 10^{-3} *près.*
- *Le nombre* $2,646$ *est une valeur approchée par excès de* $\sqrt{7}$ *à* 10^{-3} *près.*

Définition 36 *Soient* x, a *et* r *trois réels,* r *est positif.*
Si $|x - a| \leq r$ *ou* $|x - a| < r$, *on dit que* a *est une valeur approchée de* x *à* r *près.*

Exemple 37 *On a* $\left|\sqrt{5} - 2,23\right| \leq 0,01$, *donc* $2,23$ *est une valeur approchée de* $\sqrt{5}$ *à* $0,01$ *près.*

Les approximations décimales

Définition 38 .

Si x *est un réel et* N *est un entier relatif alors il existe un entier naturel* p *tel que* :

$$N \times 10^{-p} \leq x \leq (N + 1) \times 10^{-p}$$

- *Le nombre décimal* $N \times 10^{-p}$ *est dit approximation décimal par défaut de* x *à* 10^{-p}.
- *Le nombre décimal* $(N + 1) \times 10^{-p}$ *est dit approximation décimal par excès de* x *à* 10^{-p}.

Exemple 39 .

On a : $1,414 \leq \sqrt{2} \leq 1,415$ *c'est-à-dire* $1414 \times 10^{-3} \leq \sqrt{2} \leq 1415 \times 10^{-3}$ *c'est-à-dire*

$$1414 \times 10^{-3} \leq \sqrt{2} \leq (1414 + 1) \times 10^{-3}$$

♣ $1,414$ *est approximation décimal par défaut de* $\sqrt{2}$ *à* 10^{-3}.

♣ $1,415$ *est approximation décimal par excès de* $\sqrt{2}$ *à* 10^{-3}.

FIN

www.etude – generale.com

Pr : **Yahya MATIOUI**