www.etude-generale.com **TCSI**
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Les transformations dans le plan

Symétrie axiale, Symétrie centrale ,Translation et l'homothétie

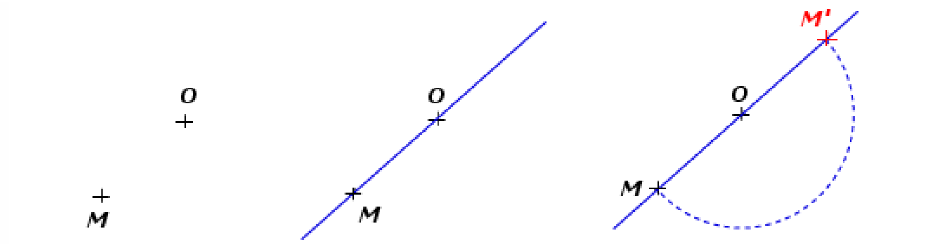
Symétrie centrale

Définition 1 .

O est un point du plan.

La symétrie centrale de centre O est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

La symétrie centrale de centre O est notée : S_O



$S_O(M)=M'$ *ssi* $\overrightarrow{OM'}=-\overrightarrow{OM}$

Remarque 2 .

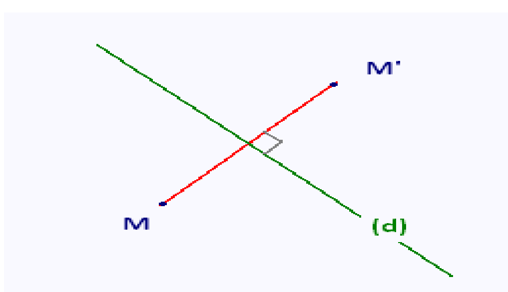
Dans une symétrie de centre I, seul le centre de symétrie, I est un point invariant.

Symétrie axiale

Définition 3 .

(d) est une droite du plan.

La symétrie axiale d'axe (d) est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que : (d) est la médiatrice du segment $[MM']$. La symétrie axiale d'axe (d) est notée : $S_{(d)}$



$S_{(d)}(M)=M'$ *ssi* (d) *est la médiatrice du segment* $[MM']$

Remarque 4 .

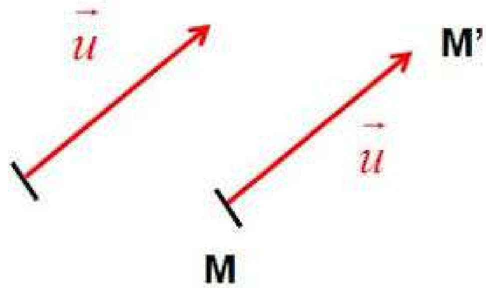
Dans une symétrie axiale d'axe (d), les points invariants sont les points de la droite (d).

Translation

Définition 5 .

$\overrightarrow{u}$ est un vecteur du plan.

La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MM'}$. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est notée : $t_{\overrightarrow{u}}$



$t_{\overrightarrow{u}}(M)=M'$ *ssi* $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{MM'}$

Remarque 6 .

Dans une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, il n'y a aucun point invariant.

Homothétie

Définition 7 .

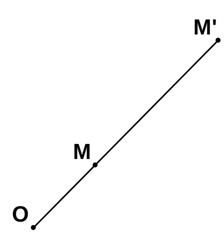
O est un point du plan et k un nombre réel. L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation qui transforme tout point M du plan au point unique M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

L'homothétie de centre O et de rapport k est notée : $h_{(O,k)}$

$$h(M) = M' \;\; ssi \;\; \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$$

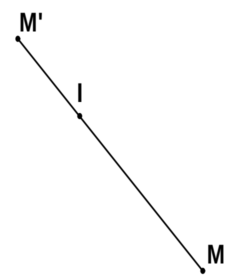
Exemple 8 .

- *h est l'homothétie de centre O et de rapport* 3.



$h(M)=M'$ *équivaut à :* $\overrightarrow{OM'}=3\overrightarrow{OM}$

- h' *est l'homothétie de centre* I *et de rapport* $\dfrac{-1}{2}$.



$h'(M)=M'$ *équivaut à :* $\overrightarrow{OM'}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{OM}$

Vocabulaire

Si $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ alors M' est l'image de M par l'homothétie h, et on dit aussi que h transforme M en M'.

Remarque 9 *.*

Soit $h_{(I,k)}$ *l'homothétie de centre* I *et de rapport* k $(k \neq 0)$.

♣ Si $k = 1$, *alors* $h_{(I,1)}$ *l'homothétie est la transformation identité : chaque point est envoyé sur lui-même.*

♣ Si $k = -1$ *alors* $h_{(I,-1)}$ *l'homothétie de rapport* -1 *est la symétrie centrale de centre* I.

♣ Si $h(M) = M'$ *alors les points* I, M *et* M' *sont alignés.*

Propriété caractéristique de la symétrie centrale et la translation et l'homothétie

Propriété caractéristique de l'homothétie

Propriété 10 *.*

Soit T *une transformation du plan* (P) *et* $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

T *est une homothétie si et seulement si* T *transforme deux points* M *et* N *du plan en deux points* M' *et* N' *tel que* $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Démonstration 11 *.*

Soit $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

Soit h *l'homothétie de centre* O *et de rapport* k *et* M *et* N *deux points tels que* $h(M) = M'$

et $h(N) = N'$ *donc* $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ *et* $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$ *donc*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} \\
&= -\overrightarrow{OM'} + k\overrightarrow{ON} \\
&= -k\overrightarrow{OM} + k\overrightarrow{ON} \\
&= k\left(-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}\right) \\
&= k\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}\right) \\
&= k\overrightarrow{MN}
\end{aligned}$$

Réciproquement, si T *une transformation du plan* (P) *telle que* $T(M) = M'$ *et* $T(N) = N'$ *on a* $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ *et* $k \in \mathbb{R}^*\setminus\{1\}$.

Résultat

Si A et B deux points du plan. A' et B' sont les images respectives des points A et B par une homothétie de rapport k $(k \neq 0)$ alors $A'B' = |k|\, AB$.

Exemple 12 .

Soient $ABCD$ *un parallélogramme et* I *et* J *deux points définis par :*

$$\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} \quad et \quad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$$

1. *Faire une figure.*
2. *On considère l'homothétie* h *de centre* I *et transforme* B *en* C.

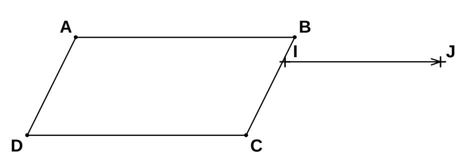
   a) *Montrer que :* $k = -2$.

3. *Soit* K *un point tel que :* $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{AB}$.

   a) *Montrer que :* $h(J) = K$.

   b) *Montrer que :* $AI = \frac{1}{2}CK$.

Solution 13 *1.*



2. *On considère l'homothétie* h *de centre* I *et transforme* B *en* C.

a) *Montrons que :* $k=-2$.

On a $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ *, alors* $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CB}$*, par suite* $3\overrightarrow{CI}=2\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}\right)$*, donc* $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{IB}$ *d'où :* $\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$ *donc*

$$\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IB}$$

ce qui signifie que $k=-2$.

3. Soit K *un point tel que :* $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$.

a) *Montrons que :* $h(J)=K$.

On a

$$\overrightarrow{IK}=-\overrightarrow{KI}=-2\overrightarrow{AB}=-2\underbrace{\overrightarrow{DC}}_{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}}=-2\overrightarrow{IJ}$$

donc $h\left(J\right)=K$.

b) *Montrons que :* $AI=\dfrac{1}{2}CK$.

On a $h(J)=K$ *et* $h(B)=C$*, donc d'après la propriété caractéristique de l'homothétie, on obtient :* $\overrightarrow{CK}=-2\overrightarrow{BJ}$.

Donc : $\overrightarrow{CK}=-2\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}\right)$ *de plus :* $\overrightarrow{CK}=-2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DC}\right)$*, par suite* $\overrightarrow{CK}=-2\left(-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DC}\right)=-2\overrightarrow{AI}$*. Donc :* $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CK}$*, par passage au norme on obtient*

$$AI=\frac{1}{2}CK$$

Propriété caractéristique de la symétrie centrale

Propriété 14 .

Soit T *une transformation du plan* (P).

T *est une symétrie centrale si et seulement si* T *transforme deux points* M *et* N *du plan en deux points* M' *et* N' *tel que* $\overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN}$.

Remarque 15 .

Si on prend $k=-1$ *on trouve la propriété caractéristique de la symétrie centrale.*

Propriété caractéristique de la translation

Propriété 16 .

Soit T *une transformation du plan* (P).

T *est une translation si et seulement si* T *transforme deux points* M *et* N *du plan en deux points* M' *et* N' *tels que* $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$.

Démonstration 17 .

Soit la translation $t_{\overrightarrow{u}}$

Si on a $t_{\overrightarrow{u}}(M) = M'$ *et* $t_{\overrightarrow{u}}(N) = N'$ *alors* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MM'}$ *et* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{NN'}$ *donc*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN'} \\
&= \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} \\
&= -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{u} \\
&= \overrightarrow{MN}
\end{aligned}$$

Réciproquement, si T *une transformation du plan* (P) *telle que* $T(M) = M'$ *et* $T(N) = N'$ *et* $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$. *Soit* A *un point du plan tel que* $T(A) = A'$ *on a* $\overrightarrow{M'A'} = \overrightarrow{MA}$ *donc*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} \\
&= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'} \\
&= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{MA} \\
&= \overrightarrow{AA'}
\end{aligned}$$

ceci signifie que M' *est l'image du point* M *par la translation de vecteur* $\overrightarrow{AA'}$, *d'où* $T = t_{\overrightarrow{AA'}}$.

Propriétés des transformations

Propriétés de la translation

♣ La Translation conserve l'alignement des Points et le coefficient d'alignement.

♣ La Translation conserve le Milieu.

♣ La Translation conserve la distance.

♣ La Translation conserve la mesure des angles.

♣ La Translation conserve le Parallelismus et l'orthogonalité.

Propriétés de la symétrie centrale

♣ La symétrie centrale conserve l'alignement des points et le coefficient d'alignement.

♣ La symétrie centrale conserve le milieu.

♣ La symétrie centrale conserve la distance.

♣ La symétrie centrale conserve la mesure des angles.

♣ La symétrie centrale conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Propriétés de la symétrie axiale

♣ La symétrie axiale conserve l'alignement des points et le coefficient d'alignement.

♣ La symétrie axiale conserve le milieu.

♣ La symétrie axiale conserve la distance.

♣ La symétrie axiale conserve la mesure des angles.

♣ La symétrie axiale conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Propriétés de l'homothétie

♣ L'homothétie conserve l'alignement des points et le coefficient d'alignement.

♣ L'homothétie conserve le milieu.

♣ L'homothétie ne conserve pas les distances.

♣ L'homothétie conserve la mesure des angles.

♣ L'homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Images des figures par les transformations

Image d'une figure par une symétrie centrale

Soient A, B et C trois points du plan A' , B' et C' sont les images respectives des points A, B et C par la symétrie de centre O.

■ L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ tel que : $AB = A'B'$.

■ L'image de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.

■ L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.

■ L'angle $\widehat{BAC}$ est isométrique à l'angle $\widehat{B'A'C'}$.

■ L'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A'et rayon r.

Image d'une figure par une symétrie axiale

Soient A, B et C trois points du plan A' , B' et C' sont les images respectives des points A, B et C par la symétrie axiale.

■ L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ tel que : $AB = A'B'$.

■ L'image de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.

■ L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.

- L'angle $\widehat{BAC}$ est isométrique à l'angle $\widehat{B'A'C'}$.
- L'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A'et rayon r.

Image d'une figure par une translation

Soient A, B et C trois points du plan A' , B' et C' sont les images respectives des points A, B et C par une translation.

- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ tel que : $AB = A'B'$.
- L'image de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.
- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- L'angle $\widehat{BAC}$ est isométrique à l'angle $\widehat{B'A'C'}$.
- L'image du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A'et rayon r.

Image d'une figure par une homothétie

Soient A, B et C trois points du plan. A', B' et C' sont les images respectives des points A, B et C par une homothétie.

- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ tel que : $A'B' = |k|\, AB$.
- L'image de la demi-droite $[AB)$ est la demi-droite $[A'B')$.
- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- L'angle $\widehat{BAC}$ est isométrique à l'angle $\widehat{B'A'C'}$.
- L'image du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' de rayon $|k|\, R$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**