Représentation graphique d'une fonction numérique

Dans tout le chapitre le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

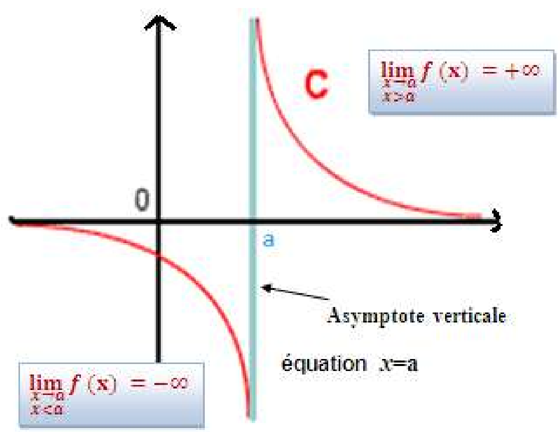
Les Asymptotes

Branche infnie d'une courbe (de fonction)

Définition 1 .
Soit f une fonction numérique de la variable réelle x et (C) sa courbe représentative, on dit que (C) admet une branche infinie si l'un des coordonnées d'un point de (C) tend vers l'infini.

Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

Définition 2 .
Si $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$, alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe (C).



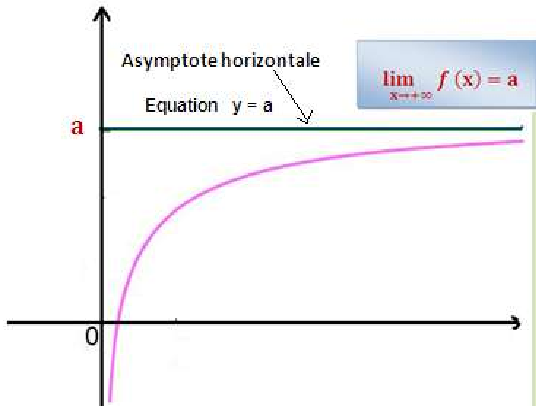
Exemple 3 .
Soit h la fonction définie su $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.

♣ *On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{5}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$.*
Donc (C_h) une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Asymptote parallèle à l'axe des abscisses

Définition 4 .

Si $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=a$ *ou* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=a$ *alors on dit que la droite d'équation* $y=a$ *est une asymptote horizontale à la courbe de* f *au voisinage de* $+\infty$ *(respectivement* $-\infty$*)* .



Exemple 5 .

Calculons $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} h(x)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} h(x)$ *, puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.*

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2x}{x}=2$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} h(x)=2.$

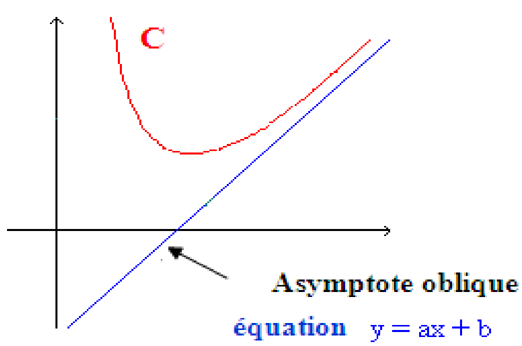
Donc (C_h) *admet une asymptote horizontale d'équation* $y=2$ *au voisinage de* $+\infty$ *et* $-\infty$.

Asymptote oblique

Dans ce paragraphe f étant une fonction de la variable réelle x qui admet une limite infinie au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisiange de $-\infty$) .

Définition 6 .

Si $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ $\left(\text{respectivement } \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}(f(x)-(ax+b))=0\right)$ *où* $a\in\mathbb{R}^*$ *et* $b\in\mathbb{R}$, *on dit que la droite d'équation* $y=ax+b$ *est une asymptote oblique à la courbe de* f *au voisinage de* $+\infty$ *(respectivement* $-\infty$*)* .



Propriété 7 .

La droite d'équation $y = ax+b$ $(a \neq 0)$ *est une asymptote oblique la courbe de* f *si et seulement si* $\left(\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} (f(x) - ax) = 0\right)$ $\Big($*respectivement* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} (f(x) -$

Exemple 8 .

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \dfrac{x^3+2x+3}{x^2+1}$.

Montrer que la courbe de la fonction f *admet une asymptote oblique au voisinage de* $-\infty$.

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{x^3+2x+3}{x^2+1} = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x = -\infty$.

Calculons $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{\frac{x^3+2x+3}{x^2+1}}{x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x^3+2x+3}{x(x^2+1)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x^3+2x+3}{x^3+x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 = a
\end{aligned}$$

Calculons $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} (f(x) - ax)$ *c'est-à-dire* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} (f(x) - x)$:

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x^3+2x+3}{x^2+1} - x \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x^3+2x+3-x^3-x}{x^2+1} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x+3}{x^2+1} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x}{x^2} \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1}{x} = 0 = b
\end{aligned}$$

alors la droite d'équation $y = x$ $(a = 1,\ b = 1)$ *est une asymptote oblique à la courbe de* f *au voisinage de* $-\infty$.

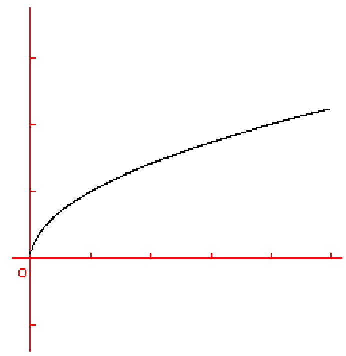
Branche parabolique

Dans ce paragraphe, on considère une fonction f de la variable réelle x, qui admet une limite infinie au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Branche parabolique de direction l'axe des abscisses

Définition 9 .

Si $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ $\left(ou \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0\right)$ *alors, on dit que la courbe* (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de* $+\infty$ (*ou au voisinage de* $-\infty$) .



Branche parabolique de direction (Ox)

Exemple 10 .

Soit f *la fonction définie sur* $[-1, +\infty[$ *par :* $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$.

1. *Calculer* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.
2. *Calculer* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, *puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

♣ *On a* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ *donc* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 2 - \sqrt{x+1} = -\infty$.

♣ *On a*

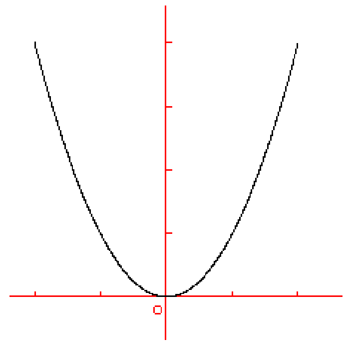
$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{x} - \frac{\sqrt{x+1}}{x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{x} - \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de f *admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de* $+\infty$.

Branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

Définition 11 .

Si $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$ *alors on dit que la courbe* (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.*



branche parabolique de direction (Oy)

Exemple 12 .

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=x^3-2x^2$.

1. *Calculer* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}f(x)$.
2. *Etudier la branche infinie de la courbe* (C) *de* f *au voisinage de* $-\infty$.

♣ *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}x^3-2x^2=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}x^3=-\infty$.

♣ *Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

On a

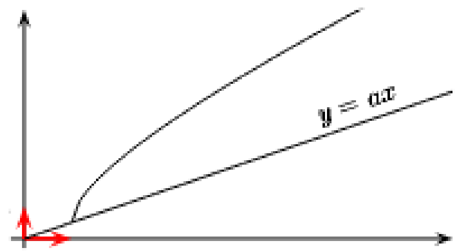
$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x^3-2x^2}{x}\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x^2-2x\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}x^2\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Donc la courbe (C) *de* f *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de* $-\infty$.

Branche parabolique de direction la droite d'équation $y=ax$ ou $a\neq 0$

Définition 13 .

Si $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ *où* $a\neq 0$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(f(x)-ax)=+\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(f(x)-ax)=-\infty$ *alos on dit que la courbe* (C) *de* f *admet une branche parabolique de direction la droite d'équation* $y=ax$ *au voisinage de* $+\infty$.



Remarque 14 .

On a la même définition au voisinage de $-\infty$.

Exemple 15 .

Soit f *la fonction définie sur* $[0,+\infty[$ *par :* $f(x)=\sqrt{x}-x$

1. *Calculer* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)$.
2. *Déterminer la branche infinie de la courbe* (C) *de* f *au voisinage de* $+\infty$.

♣ *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x}-x=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x}(1-\sqrt{x})=-\infty$.

♣ *Calculons :* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$:

On a

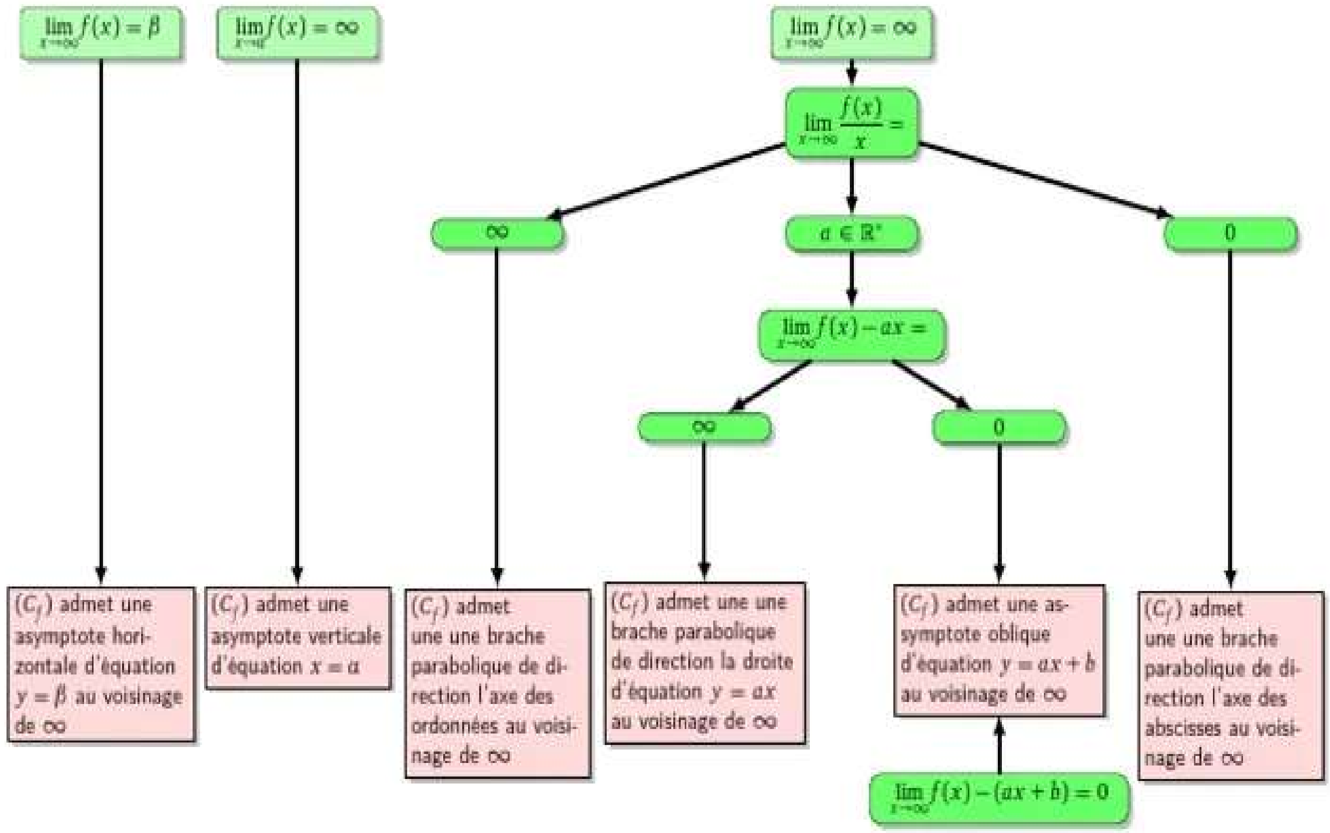
$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\sqrt{x}-x}{x}\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}-1\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}-1\\ &= -1 \quad (a=-1)\end{aligned}$$

Calculons $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(f(x)+x)$:

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

D'où la courbe (C) *de* f *admet au voisinage de* $+\infty$ *une branche parabolique de direction la droite d'équation* $y=-x$.

Étude des barnches infinies (Résumer)



Organigramme pour étudier les branches infinies

1

Concavité d'une courbe - Points d'inflexion

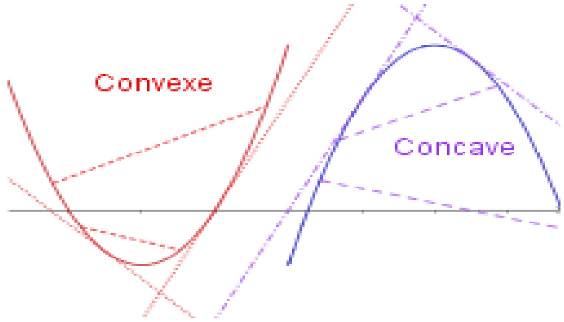
Concavité d'une courbe

Définition 16 .

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative dans un repère.

♣ *On dit que la courbe (C_f) est convexe si elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.*

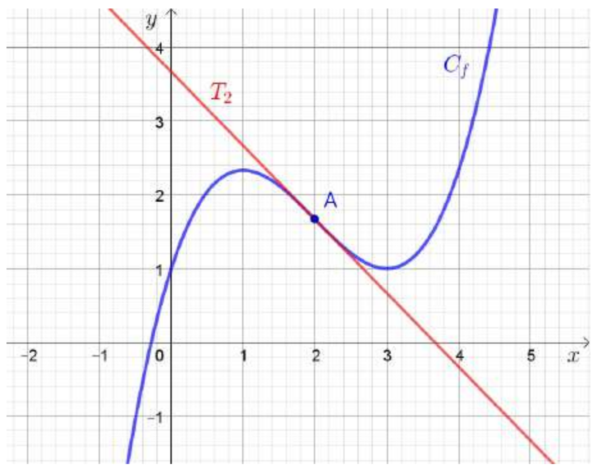
♣ *On dit que la courbe (C_f) est concave si elle est entièrement située dessous de chacune de ses tangentes.*



Points d'inflexion

Définition 17 .

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et (C) la courbe représentative de f, on dit que $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion si la courbe traverse sa tangente en ce point.

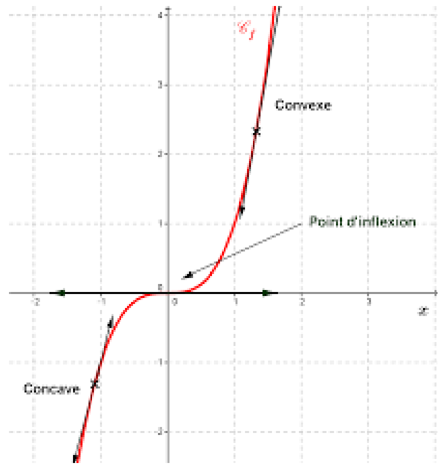


Remarque 18 .

Un point d'inflexion est un point de (C) où la courbe (C) change de concavité.

Exemple 19 .

On considère la figure qui présente le graphe d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.



La courbe (C_f) est convexe sur $[0, +\infty[$ et concave sur $]-\infty, 0]$.

Le point $O(0,0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f) la tangente T traverse la courbe (C_f) en $O(0,0)$.

Concavité et dérivée seconde

Propriété 20 .

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

♣ *Pour que la courbe (C_f) de f soit convexe sur I, il faut et il suffit que : $(\forall x \in I), f''(x) \geq 0$.*

♣ *Pour que la courbe (C_f) de f soit concave sur I, il faut et il suffit que : $(\forall x \in I), f''(x) \leq 0$.*

♣ *Pour que le point $M_0(x_0, f(x_0))$ soit un point d'inflexion de la courbe (C_f), il faut et il suffit que la dérivée seconde f'' s'annule en x_0 et change de signe de part et d'autre de x_0.*

Exemple 21 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}$.

1. *Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Étudier la concavité de la courbe (C) de f en précisant les deux points d'inflexion.*

♣ *f est une fonction polynôme, donc elle est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.*
On a
$$(\forall x \in \mathbb{R}), \ f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$
et
$$(\forall x \in \mathbb{R}), \ f''(x) = x^2 - 4$$

♣ *Étudions la concavité de (C) et déterminons les points d'inflexion.*

Étudions le signe de $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signe de $f''(x)$, on déduit que :

La courbe (C) est convexe sur $]-\infty, -2]$ et sur $[2, +\infty[$. La courbe (C) est concave sur $[-2, 2]$.

f'' s'annule en changeant de signe en $x_0 = 2$ et $x_0 = -2$, donc les deux points $A(-2, f(-2))$ et $B(2, f(2))$ sont deux points d'inflexion de (C) c'est-à-dire $A(-2, -8)$ et $B(2, -4)$.

Axe de symétrie et centre Centre de symétrie

Propriété 22 .

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur un ensemble D et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

♣ *La droite (Δ) d'équation $x = a \quad (a \in \mathbb{R})$ est un axe de symétrie de la courbe (C) si et seulement si :* $\begin{cases} (\forall x \in D), \quad (2a - x) \in D \\ (\forall x \in D), \quad f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

♣ *Le point $\Omega(a, b)$ $(a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R})$ est un centre de symétrie de la courbe (C) si et seulement si :* $\begin{cases} (\forall x \in D), \quad (2a - x) \in D \\ (\forall x \in D), \quad f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$

Exemple 23 .

On considère la fonction f définie par : $\quad f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x}$

Montrons que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) .

L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \\ &\iff -x \neq 0 \text{ et } -x \neq -2 \\ &\iff 2 - x \neq 2 \text{ et } 2 - x \neq 0 \\ &\iff (2 - x) \in D_f \end{aligned}$$

D'autre part, soit $x \in D_f$, on a

$$\begin{aligned} f(2-x) &= \frac{2(2-x)^2 - 4(2-x) + 3}{(2-x)^2 - 2(2-x)} \\ &= \frac{2(4-4x+x^2) - 8 + 4x + 3}{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x} \\ &= \frac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Par suite la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f).

Exemple 24 .

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1}$$

Montrons que $\Omega(1,7)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f).
L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x \in D_f \iff x \neq 1 \quad \iff -x \neq -1 \quad \iff 2 - x \neq 1 \quad \iff (2-x) \in D_f$$

Soit $x \in D_f$. Montrons que : $f(2-x) = 14 - f(x)$.
On a

$$\begin{aligned} f(2-x) &= \frac{2(2-x)^2 + 3(2-x) - 5}{(2-x) - 1} \\ &= \frac{2(4-4x+x^2) + 6 - 3x - 5}{-x + 1} \\ &= \frac{-2x^2 + 11x - 9}{x - 1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 14 - f(x) &= 14 - \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1} \\ &= \frac{14(x-1) - (2x^2 + 3x - 5)}{x - 1} \\ &= \frac{-2x^2 + 11x - 9}{x - 1}. \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in D_f), \quad f(2-x) = 14 - f(x).$$

Par suite le point $\Omega(1,7)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f).

Remarque 25 .

Pour étudier une fonction définie sur un ensemble D, *dont la courbe admet un axe de symétrie* $x = a$ *(un centre de symétrie* $\Omega(a, b)$*), il suffit d'étudier la fonction sur le domaine* $D \cap [a, +\infty[$ *et de conclure pour* $D \cap]-\infty, a]$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com