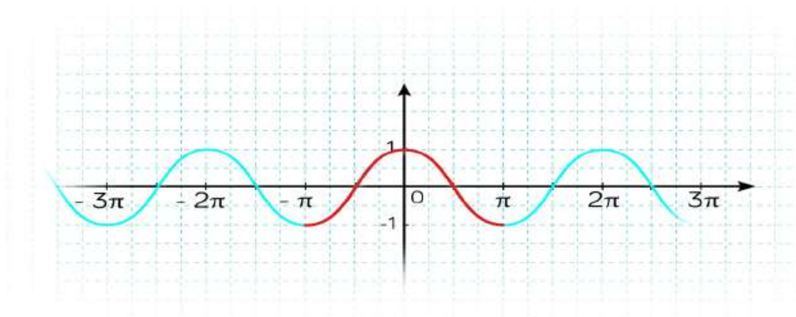
Le calcul trigonométrique 2

Représentation graphique de fonction cosinus

Définition 1 .
La fonction cosinus, notée cos, *est la fonction qui à tout réel* x *associe son cosinus.*

$$\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

Représentation graphique :



♣ D'après la représentation graphique la fonction cos est strictement croissante sur $[-\pi, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, \pi]$

x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1

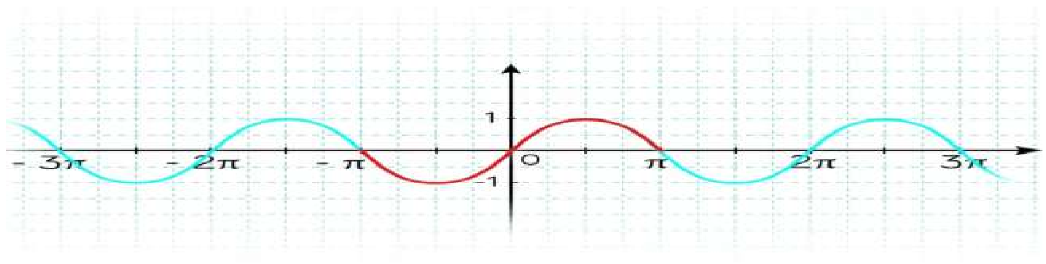
♣ La représentation graphique la fonction cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ce qui signifie que la fonction cos est paire : $\cos(-x) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Représentation graphique de fonction sinus

Définition 2 .
La fonction sinus, notée sin, *est la fonction qui à tout réel* x *associe son sinus.*

$$\begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

Représentation graphique :



♣ D'après la représentation graphique la fonction sin est strictement décroissante sur $\left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0

♣ La représentation graphique la fonction sin est symétrique par rapport à l'origine du repère ce qui signifie que la fonction sin est impaire : $\sin(-x) = \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

♣ La représentation graphique de la fonction sin sur $[0, 2\pi]$ est la même que sur l'intervalle $[-2\pi, 0]$ et ainsi de suite, on dit que la fonction sin est périodique de période 2π.

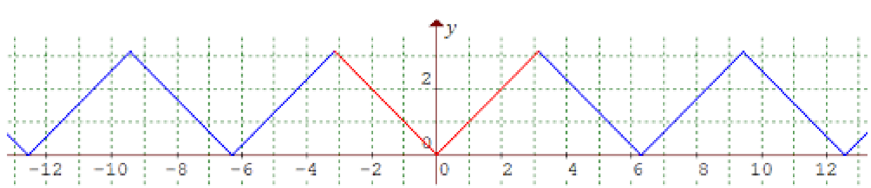
Fonction périodique

Définition 3 .
Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $T \in]0, +\infty[$. On dit que T est une période pour f si :

$$\text{pour tout } x \in D_f, \quad x + T \in D_f \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

Exemple 4 .
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Donc la fonction sin est périodique de période 2π.

Remark 5 .
Pour étudier une fonction périodique de période T il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T.



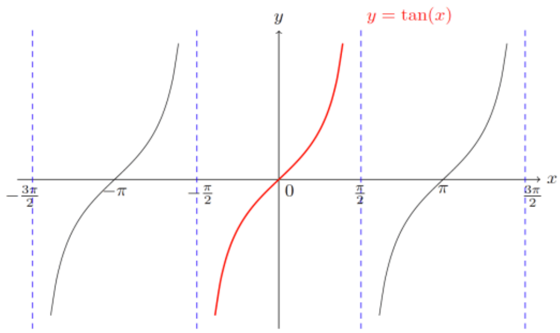
Représentation graphique de la fonction tangente (Hors programm

Définition 6 .

La fonction tangente, notée tan*, est définie pour tout réel* x *tel que* $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$*, par :*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Représentation graphique :



♣ La fonction tangente est impaire, sa courbe représentative admet l'origine pour centre de symétrie.

♣ La fonction tangente est périodique de période π.

Résolution d'équations trigonométriques

Équation trigonométrique du type : $\cos x = a$.

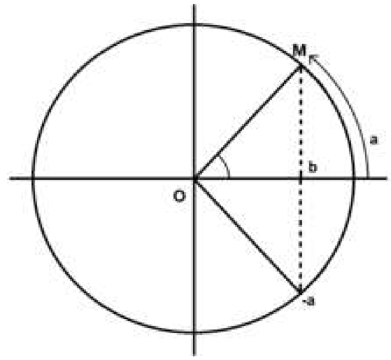
Propriété 7 .

Soit a *un réel.*
On considère l'équation (E_1) : $\cos x = a$.

- Si $|a| > 1$, *il n'y a pas de solution.*

- Si $|a| \leq 1$, *alors il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $a = \cos \alpha$*. Donc l'ensemble des solutions de l'équation* (E_1) *est alors l'ensemble des réels* x *tels que :*

$$x = \alpha + 2k\pi \quad \textit{ou} \quad x = -\alpha + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$



Exemple 8 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* : $(E) : \cos x = \dfrac{1}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$ *alors*

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{3} \quad \textit{éq} : \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \qquad ou \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} /k \in \mathbb{Z}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *est* :

$$S = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 9 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* : $(E) : \cos x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\dfrac{-\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{5\pi}{6}$, *alors*

$$\cos x = \cos\frac{5\pi}{6} \quad \textit{éq} : \begin{cases} x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ \qquad ou \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} /k \in \mathbb{Z}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *est* :

$$S = \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 10 .

Résoudre dans $[-\pi, \pi[$ *l'équation* : $(E) : \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $x \in [-\pi, \pi[$, *on a* $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4}$ *alors*

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{4} \quad \textit{éq} : \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \qquad ou \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} /k \in \mathbb{Z}$$

comme $x \in [-\pi, \pi[$, *alors*

$$-\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \pi \quad éq : -1 \leq \frac{1}{4} + 2k < 1 \quad éq : \frac{-5}{8} \leq k < \frac{3}{8}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $k = 0$, *donc* $x = \frac{\pi}{4}$.
de même on a

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \pi \; éq : -1 \leq -\frac{1}{4} + 2k < 1 \quad éq : \frac{-3}{8} \leq k < \frac{5}{8}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $k = 0$, *donc* $x = -\frac{\pi}{4}$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $[-\pi, \pi[$ *est :*

$$S = \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$$

Équations particulières

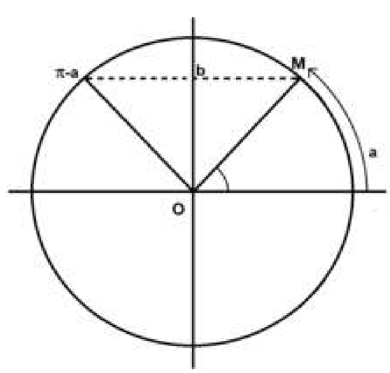
$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 \quad éq : x = 2k\pi \;/k \in \mathbb{Z} \\
\cos x &= -1 \; éq : x = \pi + 2k\pi \;/k \in \mathbb{Z} \\
\cos x &= 0 \quad éq : x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Équation trigonométrique du type $\sin x = a$.

Propriété 11 .
Soit a *un réel.*
On considère l'équation $(E_2) : \sin x = a$.

- Si $|a| > 1$, *il n'y a pas de solution.*
- Si $|a| \leq 1$, *alors il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $a = \sin \alpha$. *Donc l'ensemble des solutions de l'équation* (E_2) *est l'ensemble des réels* x *tels que :*

$$x = \alpha + 2k\pi \quad ou \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi \quad / \; k \in \mathbb{Z}$$



Exemple 12 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* : $(E) : \sin x = \dfrac{1}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$ *alors*

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{6} \quad \text{éq} : \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right. /k \in \mathbb{Z} \quad \text{éq} : \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right. /k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *est* :

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi /\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi /\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 13 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* : $(E) : \sin x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\dfrac{-\sqrt{3}}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{3} = \sin\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)$ *alors*

$$\sin x = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \quad \text{éq} : \left\{ \begin{array}{c} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. /k \in \mathbb{Z} \quad \text{éq} : \left\{ \begin{array}{c} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. /k \in \mathbb{Z}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *est* :

$$S = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi /\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi /\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 14 .

Résoudre dans $[-\pi, \pi[$ *l'équation* : $(E) : \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $x \in [-\pi, \pi[$, *on a* $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$ *alors*

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{4} \quad \text{éq} : \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right. /k \in \mathbb{Z} \quad \text{éq} : \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right. /k \in \mathbb{Z}$$

comme $x \in [-\pi, \pi[$, *alors*
Donc

$$-\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \pi \quad \text{éq} : -1 \leq \frac{1}{4} + 2k < 1 \quad \text{éq} : \frac{-5}{8} \leq k < \frac{3}{8}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $k = 0$ *donc* $x = \dfrac{\pi}{4}$.

De même on a : $k=0$, *donc :* $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $[-\pi,\pi[$ *est :*

$$S=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$$

Équations particulières

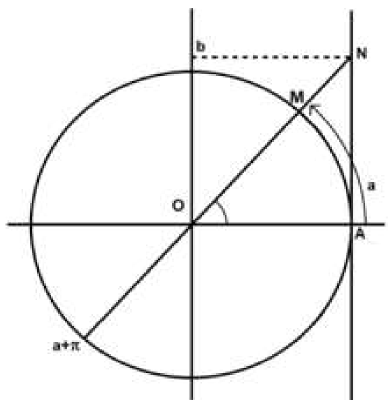
$$\begin{aligned}\sin x &= 0 \quad éq : x=k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}\\ \sin x &= 1 \quad éq : x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}\\ \sin x &= -1 \quad éq : x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Équation trigonométrique du type $\tan x = a$.

Propriété 15 .

Soit a *un réel.*

On considère l'équation (E_3) : $\tan x=a$, *il existe* α *dans* $\mathbb{R}$ *tel que :* $a=\tan\alpha$. *Donc les solutions de l'équation* (E_3) *dans* $\mathbb{R}$ *sont les réels :* $\alpha+\ k\pi\ \ /k\in\mathbb{Z}$.



Exemple 16 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* (E) : $\tan x=1$.

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, *on a* $1=\tan\dfrac{\pi}{4}$, *alors*

$$\tan x=\tan\frac{\pi}{4} \quad éq : x=\frac{\pi}{4}+k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi/\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 17 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* (E) : $\tan x=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$, *on a* $\dfrac{-\sqrt{3}}{3} = -\tan\dfrac{\pi}{6} = \tan\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$, *alors*

$$\tan x = \tan\left(\frac{-\pi}{6}\right) \quad \acute{e}q : x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 18 .

Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ *l'équation* $(E) : \tan x = 1$.

L'équation (E) *existe si et seulement si* $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$.

Soit $x \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$, *on a* $1 = \tan\dfrac{\pi}{4}$ *alors*

$$\tan x = 1 \ \acute{e}q : \ \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \ \acute{e}q : \ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

et comme $x \in [-\pi, \pi] \setminus \left\{\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ *ce qui signifie que* $x \in [-\pi, \pi]$ *et* $x \notin \left\{\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ *alors*

$$-\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq \pi \ \acute{e}q : \ \frac{-5}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}$$

et comme $k \in \{-1, 0\}$, *donc* $x = \dfrac{\pi}{4}$ *ou* $x = \dfrac{-3}{4}$. *D'où l'ensemble des solutions de l'équation* (E) *est :*

$$S = \left\{\frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$$

Inéquations trigonométriques

Inéquations : $\sin x \geq a$ et $\sin x \leq a$

Exemple 19 .

Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ *l'inéquation suivante* $(I) : \sin x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions de l'équation $(E) : \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *dans l'intervalle* $[-\pi, \pi]$ *sont :* $\dfrac{\pi}{3}$ *et* $\dfrac{2\pi}{3}$.

On construit le cercle trigonométrique et la droite d'équation $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où l'ensemble des solutions d'inéquation (I) *est :*

$$S = \left[-\pi, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$

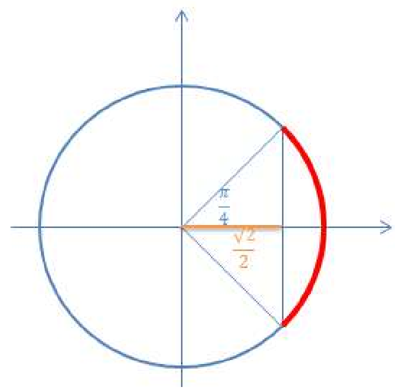
Inéquations : $\cos x \geq a$ **et** $\cos x \leq a$

Exemple 20 .

Résoudre dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$ *l'inéquation suivante :* $(I) : \cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Les solutions de l'équation $(E) : \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *sur l'intervalle* $[-\pi, \pi[$ *sont :* $\dfrac{-\pi}{4}$ *et* $\dfrac{\pi}{4}$.

On construit le cercle trigonométrique et la droite d'équation $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) *est :*

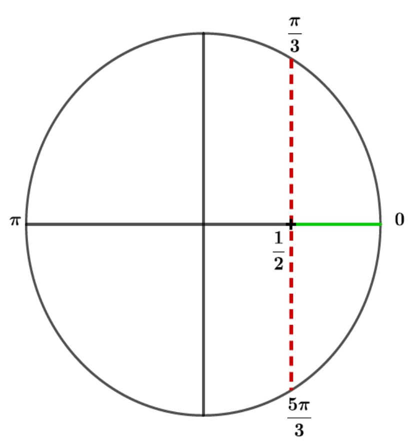
$$S = \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Exemple 21 .

Résoudre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ *l'inéquation suivante :* $(I) : \cos x \geq \dfrac{1}{2}$.

Les solutions de l'équation $(E) : \cos x = \dfrac{1}{2}$ *sur l'intervalle* $[0, 2\pi]$ *sont :* $\dfrac{\pi}{3}$ *et* $\dfrac{5\pi}{3}$.

On construit le cercle trigonométrique et la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.



Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) *est :*

$$S = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$$

Inéquations : $\tan x \geq a$ et $\tan x \leq a$

Exemple 22 .

Résoudre dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ *l'inéquation suivante :* $(I) : \tan x \leq 1$.

L'inéquation (I) *existe si et seulement si* $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

Les solutions de l'équation $(E) : \tan x = 1$ *dans l'intervalle* $[-\pi, \pi]$ *sont :* $\dfrac{\pi}{4}$ *et* $\dfrac{-3\pi}{4}$.

D'après le cercle trigonométrique l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) *est :*

$$S = \left[-\pi, \frac{-3\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

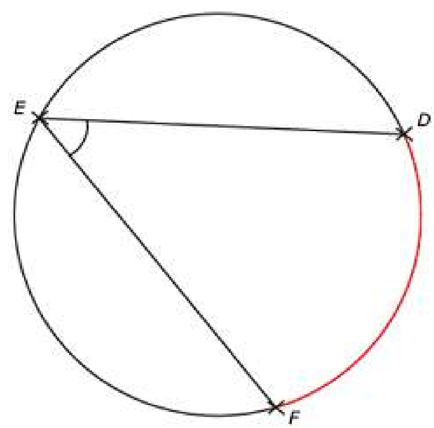
Angle inscrit et quadrilatère inscriptible - Relations $\dfrac{BC}{\sin\left(\widehat{A}\right)} = \dfrac{AC}{\sin\left(\widehat{B}\right)} = \dfrac{AB}{\sin\left(\widehat{C}\right)} = 2R$ et $S = pr$

Définition 23 .

Soit 3 *points distincts* D, E *et* F *appartenant à un cercle* (C).

On dit que l'angle $\widehat{DEF}$ *est un angle inscrit dans le cercle* (C).

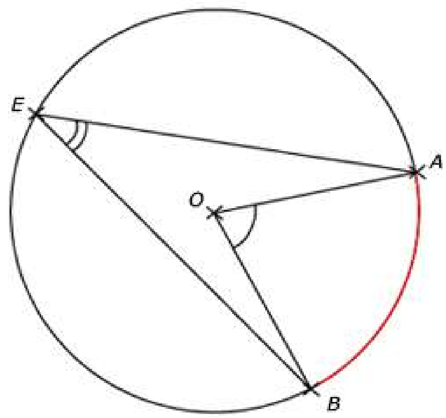
L'arc de cercle compris entre les deux côtés de l'angle s'appelle l'arc de cercle intercepté.



L'angle $\widehat{DEF}$ est un angle inscrit dans le cercle. L'arc de cercle rouge est l'arc de cercle intercepté. On dit aussi que l'angle inscrit $\widehat{DEF}$ intercepte l'arc de cercle DF.

Remark 24 .

Dans un cercle, si un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc de *cercle, alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit.*



$\widehat{AOB} = 2\widehat{AEF}$

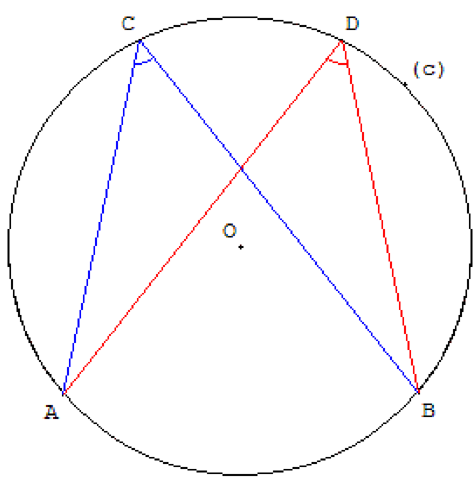
Définition 25 .

Des points cocycliques sont situés sur un même cercle.

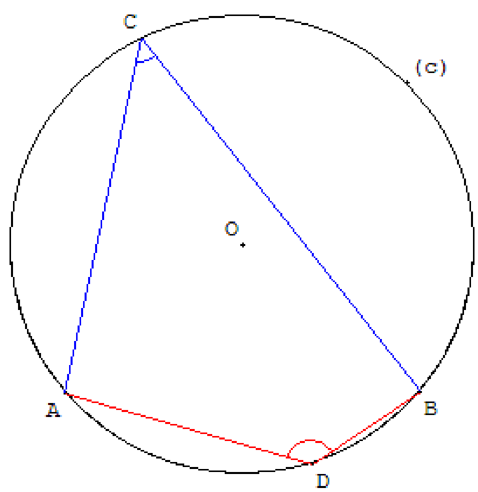
Un quadrilatère est inscriptible si les quatre sommets sont cocycliques.

Propriété 26 .

A, B et C 3 points non alignés et (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et D un point du plan. $D \in (C)$ si et seulement si $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ ou $\widehat{ACB} + \widehat{ADB} = \pi$



$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$



$\widehat{ACB} + \widehat{ADB} = \pi$

Démonstration 27 *Admis*

Aire d'un triangle - Relations $\dfrac{BC}{\sin\left(\widehat{A}\right)} = \dfrac{AC}{\sin\left(\widehat{B}\right)} = \dfrac{AB}{\sin\left(\widehat{C}\right)} = 2R$ et $S = pr$

Theorem 28 .

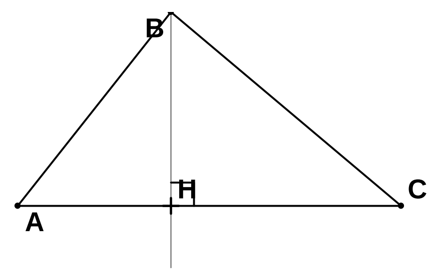
Si ABC est un triangle, et S l'aire du traingle

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \sin\left(\widehat{A}\right) = \frac{1}{2} AC \times BC \sin\left(\widehat{C}\right) = \frac{1}{2} AB \times BC \sin\left(\widehat{B}\right)$$

Démonstration 29 .

Soit ABC un triangle. On pose $\begin{cases} \widehat{CAB} = \widehat{A} \\ \widehat{CBA} = \widehat{B} \\ \widehat{BCA} = \widehat{C} \end{cases}$

On note S l'aire du triangle ABC.
Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC)



On a $S = \frac{1}{2} AC \times BH$ *et on a* $\sin\left(\widehat{A}\right) = \frac{BH}{AB}$ *d'où* $BH = AB \times \sin\left(\widehat{A}\right)$ *donc*

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \sin\left(\widehat{A}\right)$$

De même on montre que : $S = \frac{1}{2} AC \times BC \sin\left(\widehat{C}\right) = \frac{1}{2} AB \times BC \sin\left(\widehat{B}\right)$

Theorem 30 .

Si ABC est un triangle et R est le rayon de son cercle circonscrit, on a l'égalité

$$\frac{BC}{\sin\left(\widehat{A}\right)} = \frac{AC}{\sin\left(\widehat{B}\right)} = \frac{AB}{\sin\left(\widehat{C}\right)} = 2R$$

Démonstration 31 .

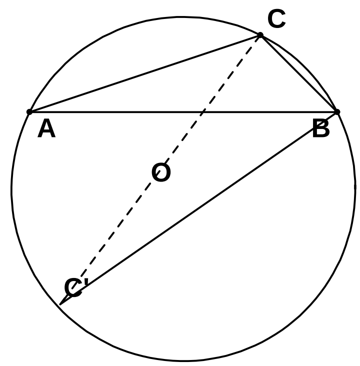
D'après le théorème de l'aire d'un triangle on a :

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \sin\left(\widehat{A}\right) = \frac{1}{2} AC \times BC \sin\left(\widehat{C}\right) = \frac{1}{2} AB \times BC \sin\left(\widehat{B}\right)$$

donc $\frac{2S}{BC \times AC \times AB} = \frac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{BC} = \frac{\sin\left(\widehat{B}\right)}{AC} = \frac{\sin\left(\widehat{C}\right)}{AB}$

Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC, on note R le rayon du cercle

Soit C' le point diamétralement opposé à C sur le cercle circonscrit.



On a $\widehat{A} = \widehat{C'}$ *donc* $\sin\left(\widehat{A}\right) = \sin\left(\widehat{C'}\right)$.

Le triangle $CC'B$ étant rectangle en B, on a $\sin\left(\widehat{C'}\right) = \dfrac{BC}{CC'} = \dfrac{BC}{2R}$, *d'où*

$$\frac{2S}{BC \times AC \times AB} = \frac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{BC} = \frac{\sin\left(\widehat{B}\right)}{AC} = \frac{\sin\left(\widehat{C}\right)}{AB} = \frac{1}{2R}$$

donc

$$\frac{BC}{\sin\left(\widehat{A}\right)} = \frac{AC}{\sin\left(\widehat{B}\right)} = \frac{AB}{\sin\left(\widehat{C}\right)} = 2R$$

Exemple 32 .

Soit ABC un triangle tel que : $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{3}$, $BA = \sqrt{2}$ *et* $AC = \sqrt{3}$.

Déterminer $\widehat{C}$, $\widehat{A}$ *et* BC.

On a $\dfrac{\sin\left(\widehat{C}\right)}{AB} = \dfrac{\sin\left(\widehat{B}\right)}{AC}$ *alors* $\sin\left(\widehat{C}\right) = \dfrac{AB}{AC}\sin\left(\widehat{B}\right)$ *d'où*

$$\sin\left(\widehat{C}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc : $\widehat{C} = \dfrac{\pi}{4}$, *et comme* $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$ *d'où* $\widehat{A} = \dfrac{5\pi}{12}$.

On a $\dfrac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{BC} = \dfrac{\sin\left(\widehat{B}\right)}{AC}$ *alors* $BC = AC \times \dfrac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{\sin\left(\widehat{B}\right)}$ *donc* $BC = \dfrac{\sqrt{3} \times \sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)} \simeq 1,93$.

Et : $S = \dfrac{1}{2}AB \times AC \sin\left(\widehat{A}\right) \simeq 1,27$.

Theorem 33 .

Si ABC est un triangle, et S l'aire du traingle alors

$$S = pr$$

où p est son demi-périmètre et r est le rayon de son cercle inscrit.

Démonstration 34 *Admis*

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com