www.etude-generale.com TCSI
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Le produit scalaire dans le plan

Le produit scalaire de deux vecteurs

La norme du vecteur

Définition 1 .

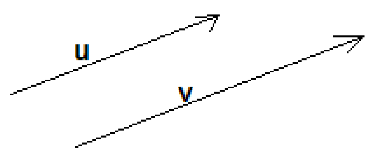
Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ et deux points A et B tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $\|\overrightarrow{u}\|$ est la distance AB.

Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.

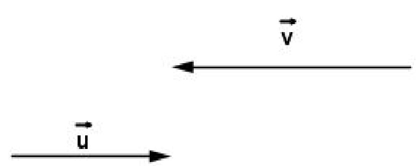
Définition 2 .

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires. On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, le nombre réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

- Si *les veteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens alors* : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.



- Si *les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraires alors* : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.



Formule trigonométrique du produit scalaire

Définition 3 *Soient A, B et C trois points du plan tels que $A \neq C$ et $A \neq B$.*

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le nombre :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls, le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$$

Exemple 4 .

Soit ABC *un triangle tel que* $AB = 3$ *et* $AC = 2$ *et* $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$. *Calculer* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

On a d'après la formule trigonométrique du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 3 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

Exemple 5 .

Soient $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs tels que :* $\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$ *et* $\|\overrightarrow{u}\| = 2$ *et* $\|\overrightarrow{v}\| = 4$. *Calculer* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \\ &= 2 \times 4 \times \cos(\frac{\pi}{3}) \\ &= 4\end{aligned}$$

Vecteurs orthogonaux

Propriété 6 .

Soient $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs non nuls.*

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Démonstration 7 .

Soient $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs non nuls.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= 0 \\ \textit{éq} &: \quad \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = 0 \\ \textit{éq} &: \quad \cos\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = 0 \quad / \ \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \quad \textit{et } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ \textit{éq} &: \quad \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv \pm\frac{\pi}{2}\,[2\pi]\end{aligned}$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Propriétés du produit scalaire

Propriété 8 .

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *trois vecteurs et pour tout* k *dans* $\mathbb{R}$ *on a :*

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ (*On dit que le produit scalaire est commutatif*).
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ et $(k.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.(k.\overrightarrow{v}) = k.(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$. (*Linéarité du produit scalaire*).
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$ (*c'est un nombre positif*).

Conclusion 9 .

On conclut les résultats suivants :

1. $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
2. $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
3. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right]$
4. $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$

Exemple 10 *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 5$ et $\|\overrightarrow{u}\| = 3$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 2$.*
Calculer $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\overrightarrow{u}$ et $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2$.

♣ $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2 = 9 + 2\times 5 + 4 = 23$

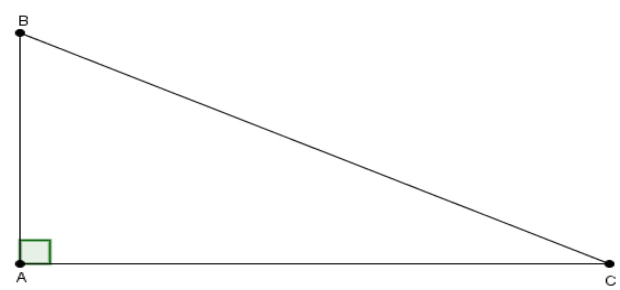
♣ $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 9 + 5 = 14$

Applications du produit scalaire

Les relations métriques dans le triangle rectangle

Théorème 11 .

Si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



Démonstration 12 .

Soit ABC est rectangle en A, on a

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}}_{=0} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 + AC^2 = AB^2 + AC^2$$

Propriété 13 .

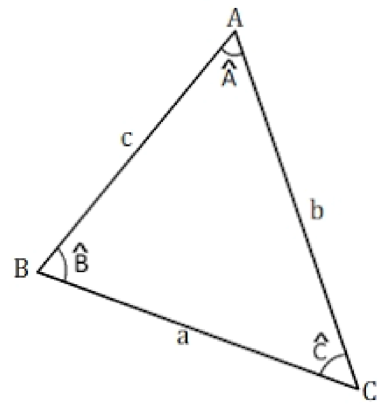
Si ABC est un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) alors

$$AH^2 = HB \times HC \quad \text{et} \quad BA^2 = BH \times BC \quad \text{avec } H \in [BC]$$

Démonstration 14 *Admis.*

Théorème d'Al Kashi

Théorème 15 .
Dans un triangle ABC, on a : $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos(\widehat{A})$.



Par la même façon on obtient : $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos(\widehat{B})$ et $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos(\widehat{C})$

Démonstration 16 .
Soit ABC un triangle, on a

$$\begin{array}{rcl} BC^2 & = & \overrightarrow{BC}^2 \\ & = & (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 \\ & = & \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \\ & = & BA^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2 \\ & = & BA^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos(\widehat{A}) \end{array}$$

donc $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos(\widehat{A})$.

Remarque 17 .
On retrouve le théorème de pythagore si l'on fait $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{2}$ il s'agit de la généralisation du théorème de pythagore.

Exemple 18 *Soit ABC un triangle tel que : $AC = 2$ et $AB = \sqrt{3}$ et $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{6}$. Calculer BC et $\cos(\widehat{C})$.*

On a d'apès le théorème d'AL Kashi :

$$\begin{array}{rcl} BC^2 & = & BA^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos(\widehat{A}) \\ & = & (\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 2 \times \cos(\dfrac{\pi}{6}) \\ & = & 3 + 4 - 4\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ & = & 1 \end{array}$$

Donc : $BC = 1$.

On a d'après le théorème d'AL Kashi dans le triangle ABC :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos(\widehat{C}) \\ \text{éq} &: \quad \cos(\widehat{C}) = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC.BC} = \frac{2^2 + 1^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \times 2 \times 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc : $\cos \widehat{C} = \dfrac{1}{2}$.

Théorème de la médiane

Théorème 19 .

Soit ABM un triangle si I est le milieu de [AB] alors :

$$MB^2 + MA^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

Démonstration 20 .

Soit ABM un triangle et I est le milieu de [AB], on a

$$\begin{aligned} MB^2 + MA^2 &= \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MA}^2 \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}(\underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}}_{=\overrightarrow{0}}) + 2\overrightarrow{IB}^2 \quad , \left(\overrightarrow{IB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right) \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 \\ &= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \end{aligned}$$

donc $MB^2 + MA^2 = 2MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2$

Exemple 21 .

Soit ABC un triangle et K est le milieu de [AB]. On donne : $BC = 5$, $AC = 7$ *et* $AB = 8$. *Calculer CK.*

On a d'après le théorème de la médiane dans le triangle ABC :

$$\begin{aligned} CA^2 + CB^2 &= 2CK^2 + \frac{AB^2}{2} \\ \text{éq} &: \quad 2CK^2 = CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2} \\ \text{éq} &: \quad CK^2 = \frac{CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2}}{2} \\ \text{éq} &: \quad CK^2 = \frac{7^2 + 5^2 - \frac{64}{2}}{2} = 21 \end{aligned}$$

donc : $CK = \sqrt{21}$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com